Série d'exercices *** $2^{ème}$ Sciences **P.DU 1^{ER} ET 2^{ND} DEGRE**	Lycée Secondaire Ali Zouaoui " Hajeb Laayoun "

Définition:

On appelle fonction du second degré (ou trinôme) la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=ax^2+bx+c$ avec $\underline{a\neq 0}$.

L'expression ax^2+bx+c s'appelle trinôme du second degré.

Forme canonique :

On appelle forme canonique du trinôme ax^2+bx+c avec $\underline{\underline{a\neq 0}}$ l'écriture sous la forme :

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ ou $\Delta=b^2-4ac$; Δ *est appelé le discriminant de* ax^2+bx+c .

Factorisation du trinôme :

Si $\Delta<0$ alors le trinôme ax^2+bx+c n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$	Si $\Delta=0$ alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	Si $\Delta>0$ alors $ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Equation du second degré :

Définition :

On appelle racine du trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $\underline{\underline{a\neq 0}}$ toute solution quand elle existe de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

Résolution de l'équation $f(x)=0$:

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ ou $\Delta=b^2-4ac$

	Racine de $f(x)=0$	Factorisation	Signe de $f(x)$
$\Delta<0$	N'est pas de solutions dans $\mathbb{R}$	On ne peut pas factoriser	Pour tout $x\in\mathbb{R}$ signe $(f(x))=$ signe (a)
$\Delta=0$	Une racine double $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	$f(x)=a(x-x_1)^2$	Pour tout $x\in\mathbb{R}\,(x\neq x_1)$ signe $(f(x))=$ signe (a)
$\Delta>0$	A deux racines distincts $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	Supposons que $x_1<x_2$ ➢ signe $(f(x))=$ signe (a) si $x\in]-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty[$ ➢ signe $(f(x))=$ signe $(-a)$ si $x\in[x_1,x_2]$

Discriminant réduit :

Soit $\Delta' = b'^2 - ac$ avec $b' = \frac{b}{2}$ *, on a alors* $\Delta = 4\Delta'$

- *Si* $\Delta' < 0$ *alors l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *n'admet pas des solutions dans* $\mathbb{R}$.
- *Si* $\Delta' = 0$ *alors l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *admet une racine double* $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- *Si* $\Delta' < 0$ *alors l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *admet deux racines distincts*

$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ *et* $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$.

Somme et produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ **:**

Dans le cas où $\Delta \geq 0$*, on a :* $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ *et* $\boxed{x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}}$

Remarque :

☞ *Si* $a + b + c = 0$ *alors* $x_1 = 1$ *et* $x_2 = \frac{c}{a}$

☞ *Si* $a - b + c = 0$ *alors* $x_1 = -1$ *et* $x_2 = -\frac{c}{a}$

EXERCICE N°1:

Factoriser puis résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes:*

(a) $(x^2 - 1) + x + 1 = 0$

(b) $(x-3)(x+5) - (-x+4)(x-3) = 0$

(c) $x^2 - 2x + 1 = (x + \sqrt{3})(x-1)$

EXERCICE N°2:

Résoudre chaque équation après avoir déterminer l'ensemble de définition.

(a) $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{x}{x-1}$; *(b)* $\frac{2x-1}{2x+3} = \frac{2x+1}{2x-3}$; *(c)* $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$

EXERCICE N°3:

Déterminer le signe des expressions proposées suivant les valeurs de x .

$f(x) = (x-1)(2x+3)(5-3x)$; $g(x) = \frac{-3x+4}{x-1}$; $h(x) = \frac{(x-2)(4-x)}{(x-1)(5x+3)}$

EXERCICE N°4:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*

(a) $\frac{x+1}{x^2+5} \leq 0$; *(b)* $\sqrt{x^2 + x + 1} < 0$; *(c)* $|x+1| + |x^2 - 3| \geq 2$

(d) $\frac{x^2 - 6x + 9}{(x+1)(x+3)} \geq 0$; *(e)* $|x-1| \geq 3x - 2$; *(f)* $\sqrt{x+4} \leq x$

EXERCICE N°5:

Soit $f(x)=|3x-2|-|-2x+1|$

1°) Calculer $f(0)$ puis déterminer x pour que $f(x)=0$.

2°) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)<x-1$.

EXERCICE N°6:

Soit $(a,x)\in\mathbb{R}^2$

1°) Montrer que $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ et $x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$

2°) Factoriser puis résoudre dans $\mathbb{R}$.

(a) $x^2+2x-3=0$; (b) $2x^2+2x-3=0$; (c) $x^2-3x-5\leq 0$

EXERCICE N°7:

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$S_1:\begin{cases}x-y=1\\ xy=2\end{cases}$; $S_2:\begin{cases}2x+3y=12\\ xy=6\end{cases}$; $S_3:\begin{cases}x^2+y^2=25\\ xy=12\end{cases}$; $S_4:\begin{cases}x^2+2y^2=6\\ xy=2\end{cases}$

EXERCICE N°8:

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

(a) $x^2-6\sqrt{2}x+2=0$; (b) $-7x^2+4x+46=0$; (c) $(x+2)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=0$

(d) $\frac{6x^2-5x-14}{(x-2)^2}=0$; (e) $x^4-3x^2-4=0$; (f) $12x^2-x+1\leq 0$

EXERCICE N°9:

Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation :

$(E_m):(m-2)x^2+2(m+1)x+5m+5=0$

EXERCICE N°10:

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'inéquation suivante :

$(I_m):(m-3)x^2-2(m+1)x+2m-4>0$

EXERCICE N°11:

Soit l'équation $3x^2+5x-7=0$.

Sans chercher les solutions x_1 et x_2 de cette équation, calculer:

(a) $x_1^2+x_2^2$; (b) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; (c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; (d) $x_1^3+x_2^3$

EXERCICE N°12:

Soit l'équation $(E_m):3x^2+(3m+2)x-5=0$ où $m\in\mathbb{R}$.

1°) Justifier que pour tout $m\in\mathbb{R}$ l'équation (E_m) admet deux racines distinctes.

2°) Déterminer m pour que (-1) soit une solution de (E_m).

3°) Existe-t-il $m\in\mathbb{R}$ tel que (E_m) admet deux racines de somme (-2) ?

4°) Existe-t-il $m\in\mathbb{R}$ tel que (E_m) admet deux racines opposées ?