Série d'exercices *** $2^{ème}$ Sciences
CALCUL VECTORIEL

Lycée Secondaire Ali Zouaoui
" Hajeb Laayoun "

Parallélogramme :

$ABCD$ est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Milieu d'un segment :

I est le milieu de $[AB]$ (on note $I=A*B$) équivaut à $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$.

Vecteurs colinéaires :

☞ *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=\alpha\vec{v}$.*

Base et repère :

- *$(\vec{u},\vec{v})$ est une base équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.*
- *$(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère équivaut à $(\vec{u},\vec{v})$ est une base et O un point fixe.*

Coordonnées d'un point, Cordonnées d'un vecteurs :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

- *Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x,y) de réel tel que :*
  $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$
- *Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan, donc on a :*
  *) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$
  *) $I=A*B\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$
- *Soient $\vec{u}(x_1,y_1)$ et $\vec{v}(x_2,y_2)$ deux vecteurs du plan, donc on a :*
  $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ y_1+y_2\end{pmatrix}$
- *$(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormé du plan équivaut à* $\begin{cases}\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\\ \text{et}\\ \vec{i}\perp\vec{j}\end{cases}$

Norme d'un vecteur, distance de deux points :

Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan.

Soit $\vec{u}(x,y)$ un vecteur du plan.

$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$; $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Vecteurs colinéaires , vecteurs orthogonaux :

Soient $\vec{u}(x_1 , y_1)$ *et* $\vec{v}(x_2 , y_2)$ *deux vecteurs du plan.*

- $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires équivaut à* $dét(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$
- $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux équivaut à :* $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

EXERCICE N°01:

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, *on donne les points* $A(2,7)$, $B(7,-1)$ *et* $C(5,-4)$.

1°) Faire une figure et placer les points A , B *et* C .

2°) a- Construire le point D *tel que* $ABCD$ *soit un parallélogramme.*

b- Déterminer par le calcul les coordonnée du point D .

3°) Placer le point $M(-3,9)$ *dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Les points C , D *et* M *sont – ils alignés ?*

4°) a- Déterminer par le calcul les coordonnés du point E *tel que* $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB}$

b- Placer E *sur la figure.*

EXERCICE N°03:

Soit ABC *un triangle et le point* M *tel que* $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1°) Faire une figure et construire le point M .

2°) Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

3°) Placer le point N *tel que* $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

4°) En déduire que les points A , M *et* N *sont alignés.*

EXERCICE N°04:

Soit un parallélogramme $ABCD$. *Le point* I *est le milieu de* $[BC]$, *le point* E *est défini par :* $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ *et le point* A' *est le milieu de* $[AC]$.

1°) Construire les points I , A' *et* E .

2°) Montrer que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

3°) Montrer que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

4°) En déduire que les points D , E *et* I *sont alignés.*

EXERCICE N°05:

Soit un triangle ABC. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit G le point tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1°) a- Montrer que $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$.

b- En déduire que $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GA'}$.

2°) Montrer de même que $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GB'}$ et que $\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{GC'}$.

3°) En déduire que les trois médianes sont concourantes en G. (Le point G est appelé centre de gravité du triangle ABC).

EXERCICE N°06:

Soit un parallélogramme $ABCD$. Soit M le point défini par :

$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

1°) Montrer que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$

2°) Déterminer les réels α et β tels que $\overrightarrow{DM}=\alpha\overrightarrow{DC}+\beta\overrightarrow{DB}$.

3°) Déterminer les réels α' et β' tels que $\overrightarrow{DM}=\alpha'\overrightarrow{DC}+\beta'\overrightarrow{DA}$.

EXERCICE N°07:

Soit un triangle ABC .On désigne par O le centre du cercle circonscrit, par G le centre de gravité et par H l'orthocentre du triangle ABC.

Soient $M=B*C$ et $D=S_O(A)$.

1°) a- Quelle est la nature du quadrilatère $BHCD$?

b- En déduire que $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MO}$.

2°) Montrer que $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

3°) On utilisant la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

4°) En déduire que O, H et G sont alignés.(La droite qui passe par O, H et G s'appelle la droite d'Euler du triangle ABC).