

Exercice n°1

Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \frac{8U_n - 6}{U_n + 1} \end{cases}$$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 6$

b) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(6 - U_n)}{U_n + 1}$

c) En déduire que la suite U est décroissante

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - 6 \leq \frac{2}{7}(U_n - 6)$

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n - 6 \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3) on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k$. Montrer que $6 \leq S_n \leq 6 + \frac{21}{5n} \left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n\right)$ et déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice n°2 :

A) On considère $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ définie sur $[0; +\infty[$

1°) Démontrer que si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq f(x) \leq 1$

2°) Démontrer que $f(x) - x = \frac{-2x^2 + x + 1}{2\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + x\right)}$ (on peut l'admettre si on n'arrive pas à le

démontrer) et étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [0; 1]$

B) On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$

1°) Démontrer par récurrence que si $n \geq 0$ on a $0 \leq U_n \leq 1$

2°) Etudier le sens de variation de (U_n)

3°) On rappelle la formule très connue $\cos(2a) = 2(\cos a)^2 - 1$

a) Démontrer que l'on a $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x \in [0; \pi]$

b) Démontrer par récurrence que si $n \geq 0$ on a $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

c) Conclure pour la limite de (U_n)

Exercice n°3 :

Soit la suite U définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \cos \theta \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \end{cases} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- 1) Montrer que $U_1 = \cos \frac{\theta}{2}$
- 2) a) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$
b) montrer que U est croissante
c) en déduire quelle est convergente.
- 3) a) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
b) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice n°4 :

Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$

- 1) a) montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 telle que $\frac{1}{3} < x_0 < 1$
b) déterminer le signe de $h(x)$ sur \mathbb{R} .
- 2) soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3}$
étudier les variations de f
- 3) Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$
- 4) a) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq x_0$
b) montrer que U est croissante
c) en déduire quelle est convergente.