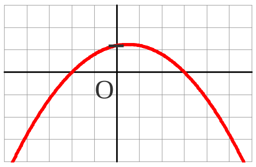
EXERCICE N°1

La parabole ci-contre est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal.
$(\|\vec{i}\| = 1 \ ; \ \|\vec{j}\| = 5)$



Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une courbe ne représente pas une primitive de la fonction f . Laquelle ? (justifier la réponse)

Figure 1

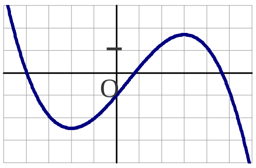


Figure 2

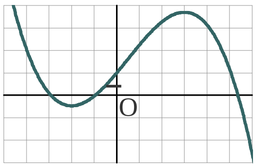
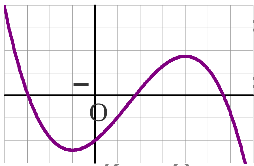


Figure 3



EXERCICE N°2

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; $I = R$

2°) $f : x \mapsto (2x+1)(x^2+x+1)$; $I = R$

3°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4°) $f : x \mapsto (2x+1)\sin(x^2+x+1)$; $I = R$

5°) $f : x \mapsto \sin x + x\cos x$; $I = R$

6°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $I =]-1,1[$

7°) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $I =]0,\pi[$

8°) $f : x \mapsto \cos x.\cos 2x$; $I = R$

9°) $f : x \mapsto \dfrac{x\cos x + \sin x}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$

10°) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I =]-2,0[$

EXERCICE N°3

1°)Déterminer trois réels a, b et c tels que : $x^2 = a.(x-1)^2 + b.(x-1) + c$.

2°) En déduire les primitives de f sur R tel que $f(x) = x^2(x-1)^{2009}$

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur R par : f(x) = x.cos x.

1°)Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur R par : g(x) = x.sin x.

2°)En déduire une primitive de f sur R

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = a\cos x + b\cos^3 x$ où a et b deux réels .

1°)Calculer $f'(x)$ *et* $f''(x)$

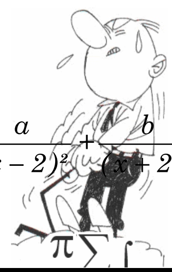
2°)Comparer f(x) et $f''(x)$ *En déduire les primitives de f dans R .*

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$

1°)Prouver qu'il existe deux réels a et b telles que : pour tout x de $R - \{-2,2\}$*: on ait :* $f(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$

2°)Déduire les primitives sur $]-2,2[$ *de f .*



EXERCICE N°7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I =]-∞ ; 2[par : $f(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

1°) Déterminer les réels a et b, tels que pour tout réel x de l'intervalle I =]-∞ ; 2[: $f(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}$

2°) En déduire la primitive de f sur l'intervalle I =]-∞ ; 2[qui s'annule en x = 1.

EXERCICE N°8

1°)Déterminer une primitive sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ *de la fonction :* $x\mapsto\dfrac{1}{cos^2x}$

2°)On considère le fonction G, définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ *par :* $G(x)=\dfrac{\sin x}{cos^3 x}$.

Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$*, et que :* $G'(x)=\dfrac{3}{cos^4 x}-\dfrac{2}{cos^2x}$

3°)En déduire une primitive, sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$*, de la fonction :* $f : x\rightarrow\dfrac{1}{cos^4 x}$

EXERCICE N°9

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$ *par :* $f(x) = (x^2+x+1)\sqrt{3-2x}$

1°)Montrer que : $x^2=\dfrac{(3-2x)^2}{4}-\dfrac{3(3-2x)}{2}+\dfrac{9}{4}$

2°)Déterminer alors le primitive de f dans $\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$ *qui s'annule en 1*

EXERCICE N°10

1°)Montrer que la fonction $f : x\rightarrow\dfrac{1}{1+x^2}$ *admet des primitives sur R.*

On notera alors F la primitive de vérifiant F(0)=0.
2°)Etudier la parité de F et préciser le sens de variations de F sur R.
3°)Etudier les variations de la fonction sur $]0,+\infty[$

4°)En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout x > 0 , on ait : $F(x)=c-F\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5°)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=c$

6°)On pose, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=\tan x$.

- *a- Montrer que la fonction* $\varphi : x\mapsto F\circ g(x)-x$ *est dérivable sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$*, et calculer* $\varphi'(x)$.
- *b- En déduire que, pour tout x de* $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F\circ g(x)=x$.
- *c- Déterminer alors* $F(1), F(\sqrt{3})$ *et* $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- *d- Montrer que* $c=\dfrac{\pi}{2}$

EXERCICE N°11

Soit F la fonction définie sur]-∞ ; 1] par : $F(x)=x\sqrt{1-x}$

1°) a) Montrer que F est dérivable sur]-∞ ; 1[et étudier la dérivabilité de F en 1.
b) Calculer F'(x) pour tout x de]-∞ ; 1[.

2°) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur]-∞ ; 1[par : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3°) Soit h la fonction définie sur]-∞ ; 1[par : $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

a) *Exprimer $h(x)$ en fonction de $F'(x)$ et de $g(x)$.*
b) *En déduire une primitive H de h sur $]-\infty ; 1[$.*
c) *Déterminer la primitive H_0 de h s'annulant en $x = -3$.*

EXERCICE N°12

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1°) a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
2°) Soit F la primitive de f sur $[0 ; +\infty[$ telle que $F(0) = 0$. On ne cherchera pas à exprimer $F(x)$.
a) *Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0 ; +\infty[$?*
b) *Quelles sont les variations de F sur $[0 ; +\infty[$?*

3°) On définit sur $[0 ; +\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ *et* $K(x) = F(x) - \dfrac{2}{3}x$.

a) *Etudier, sur $[0 ; +\infty[$, les variations de H et K.*
b) *En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a :* $\dfrac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.
c) *En déduire la limite de F en $+\infty$.*

4°) a) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α sur $[0 ; +\infty[$.
c) *Montrer que l'on peut préciser :* $\pi \leq \alpha \leq \dfrac{3}{2}\pi$.

EXERCICE N°13

Soit f la fonction définie sur $]-1 ; 1[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *F la primitive de f sur $]-1 ; 1[$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ *par :* $g(x) = F(\sin x)$.

Démontrer que $g'(x) = 1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ *et en déduire que $F(\sin x) = x$ pour tout x de* $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.