

EXERCICE N°1

1°) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x \ln(x) - x + 1$.

- Etudier le sens de variations de g
- En déduire le signe de g .

2°) On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$

- Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1 .
- Dresser le tableau de variation de f .
- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm)

EXERCICE N°2

1°) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$

- Etudier les variations de f
- En déduire que pour tout $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$

2°) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

- Etudier les variations de f
- En déduire que pour tout $x \geq 0$: $\ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

3°) Etudier la limite éventuelle en 0^+ de $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

EXERCICE N°3

Soit f définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = (1-x^2) \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Montrer que f est continue.

- Etudier la parité de f
- Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $] -1, 1[$.

EXERCICE N°4

Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ par $g(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{x-1}$ et prolongée par continuité en 0 et en 1 .

- Que valent $g(0)$, $g(1)$?
- Etudier la branche infinie de C_g .

EXERCICE N°5

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$

- Etudier les variations de g . Préciser $g(1)$.
- En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$.

- Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression $f(x)$).
Déterminer la limite de f en 0 .
- Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2x} g(x)$.

En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4°) On nomme C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé ; unité graphique 5 cm. Tracer C .

Partie C

1°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0 ; 1[$ (on pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0 ; 1[$ par $h(x) = f(x) - x$).

On nomme α cette solution.



2°) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

On nomme β cette solution. Montrer que $\alpha\beta = 1$.

3°) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} . En déduire un encadrement de α

EXERCICE N°6

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.

1°) a) Montrer que $g'(x) = \frac{P(x)}{x}$, où P est un polynôme de degré 3.

b) Vérifier que $P(1) = 0$. Factoriser P .

c) Étudier le sens de variation de g . (On ne demande pas le calcul des limites en 0 et en $+\infty$)

2°) Déduire de la question précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1°) a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

b) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Justifier que les droites (D) et (D') d'équations respectives : $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C).

2°) a) Démontrer que la fonction h telle que $h(x) = x + \ln x$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.

b) En déduire que (D') coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant : $\alpha + \ln \alpha = 0$.

Démontrer que : $0,56 < \alpha < 0,57$.

3°) Étudier le sens de variation de f .

4°) Déduire du 3° l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$.

Démontrer que : $0,46 < \beta < 0,47$.

5°) Construire (C) et (D').

EXERCICE N°7 : Le plan P est muni d'un repère orthonormal. (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 3 cm).

1°) On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ si $x > 0$
 $f(0) = 1$

Montrer que f est continue.

2°) Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$

a) Étudier le sens de variation de g .

b) Calculer $g(0)$ et en déduire que sur \mathbb{R}^+ : $\ln(1+x) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$

c) Par une étude analogue, montrer que si $x \geq 0$, alors $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

d) Établir que pour tout x strictement positif on a : $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

3°) Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

a) Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que sur $[0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$

d) On désigne par (ζf) la représentation graphique de f dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j})

Construire la tangente T à (ζf) au point d'abscisse 0.

Montrer que (ζf) admet une asymptote. Tracer la courbe (ζf) .

