Séries d'exercices ***4ème technique***
GEOMETRIE DANS LE ESPACE

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web: ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

EXERCICE N°1

Soit ABC un triangle isocèle, rectangle en A.

1°)Prouver sans calcul, que le vecteur $\vec{u} = \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{AC}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{AB}$ *et que le vecteur* $\vec{v} = \overrightarrow{BC} \wedge \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

2°)Déterminer les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

3°)Le produit vectoriel est-il une opération associative ?.

EXERCICE N°2

Dans l'espace ξ *, rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

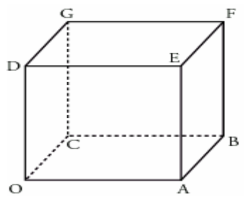
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *les vecteurs définis par :* $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}\right)$, $\vec{v} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} - 2\sqrt{2}\,\vec{k}\right)$

et $\vec{w} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2\sqrt{2}\,\vec{k}\right)$

1°)Démontrer que $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ *est un base orthonormal.*

2°)Cette base est-elle direct ou indirect ?.

EXERCICE N°3



Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessous.
L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.
On désigne par a un réel strictement positif.
L, M, et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\,\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = a\,\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{BK} = a\,\overrightarrow{BF}$.

1°) a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.
b) En déduire l'aire du triangle DLM.
c) Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).
2°) On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).
a) Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ *et* $\overrightarrow{OK}$ *étant colinéaires, on note* λ *le réel tel que* $\overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{OK}$.

Démontrer que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. *En déduire que H appartient au segment [OK].*

c) Déterminer les coordonnées de H.

d) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ *en fonction de* $\overrightarrow{OK}$. *En déduire que* $HK = \dfrac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2+2}}$.

EXERCICE N°4

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :
- *OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,*
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par :

1°)Quelle est la nature du triangle ABC ?
2°)Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3°)Calcul de OH
a)Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.

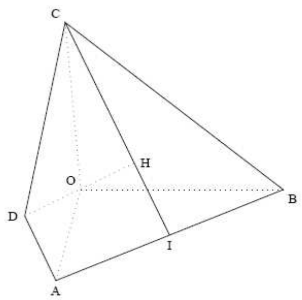
b)Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que $OH = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4°)Étude du tétraèdre ABCD.

L'espace est rapporté au repère orthonormal, $\left(O,\dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA},\dfrac{1}{b}\overrightarrow{OB},\dfrac{1}{c}\overrightarrow{OC}\right)$

a)Démontrer que le point H a pour coordonnées :.$\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$

b)Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
c)Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.



EXERCICE N°5 *(Bac.Sc 2008p).*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$
On considère les points A(3,2,6) ; B(1,2,4) et C(4,-2,5).
1°)a)Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
b)En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
c)Calculer le volume du tétraèdre OABC.
2°)Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
Montrer que $OH = \dfrac{4}{3}$.
3°)Soit S la sphère de centre O et passant par A.
a)Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC) est un cercle ζ de centre H.
b)Calculer le rayon du cercle ζ.

EXERCICE N°6

Soient les points A(1;0;0), B(0;1;1), C(0;-1;-1), D(-1;1;-1) dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

1°) a) Calculer l'aire du triangle ABC.
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
c) Vérifier que D n'appartient pas au plan (ABC).
2°) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite (Δ) et du plan (ABC).
c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

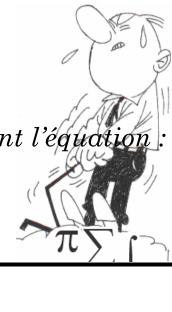
3°) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

4°) a) Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P) du segment [DC].
b) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ') d'intersection des plans (P) et (ABC)

EXERCICE N°7 *(Bac 95C)*

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé R=$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points : A(2, -3 , -1) , B(1 , 0 , 2) et C(0, 1 , 3)
1°)a)Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
b)Ecrire une équation cartésienne du Plan P passant par les points A , B et C .
2°)Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi,\pi[$, on considère l'ensemble S_t des points M(x,y,z) vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2y\sin t + 2z + t^2 + \sin^2 t - 1 = 0$
Montrer que S_t est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.



3°)a)Etudier, suivant les valeurs de t, l'intersection de la sphère S_t et du plan P .
b)Dans le cas où le plan P est tangent à la sphère S_t, déterminer les cordonnées du point de contact.

EXERCICE N°8*(Bac 96P)*

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $R=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points : $A(1, 2, -1)$ et $B(2, 1, 1)$.
1°)Déterminer une équation du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).
2°)Soit P_m le plan d'équation : $x + y + m - 3 = 0$ où m est paramètre réel.

a) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m .
b) Pour quelle valeur de m la droite (AB) est-elle incluse dans le plan P_m ?
c) Montrer que le plan P_m est perpendiculaire au plan Q .

3°)Soit B' le projeté orthogonal de B sur P_m et A' le projeté orthogonal de A sur P_m .
Déterminer les valeurs de m pour que ABB'A' soit un carré .

EXERCICE N°9 *(Bac 97P)*

Dans L'espace ξ *rapporté à un repère orthonormé* $R=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points $A(1,-1,2)$ et $B(-1,1,-2)$.
1°)Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2°)Soit P le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (AB) et Q le plan dont une équation cartésien est : $x - y + 2z + 6 = 0$.

a) Donner une équation cartésienne du plan P .
b) Vérifier que le plan Q passe par le point B et est parallèle au plan p .

3°)On considère la sphère (S) tangente en B au plan Q et dont l'intersection avec le plan P est le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$.
On désigne par I le centre de la sphère (S) et par (a , b , c) les cordonnées de I.

a) Montrer que le point I appartient à la droite (AB).
b) En déduire que : $b = -a$ et $c = 2a$.
c) Montrer que $IB^2 - IA^2 = 12$ et en déduire que : $a - b + 2c = 3$.
d) Déterminer alors les cordonnées du point I et écrire une équation cartésienne de (S)

EXERCICE N°10

Partie A

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :$A(-1 ; 0 ; 2)$, $B(3 ; 2 ; -4)$, $C(1 ; -4 ; 2)$, $D(5 ; -2 ; 4)$.

On considère les points I, J et K définis par : I milieu de [AB], K milieu de [CD] et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

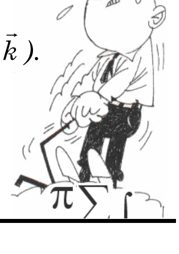
1°) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2°) a) Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.
c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.
d) Montrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Partie B

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par : I milieu de [AB], K milieu de [CD], $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
Soit G le barycentre de {(A ; 3) ; (B ; 3) ; (C ; 1) ; (D ; 1)}.
1°) Déterminer le barycentre de {(A ; 3) ; (D ; 1)} et le barycentre de {(B ; 3) ; (C ; 1)}.
2°) Démontrer que les droites (IK) et (JL) sont sécantes.
3°) Soit P le milieu de [IK], déterminer l'ensemble des points M de l'espace E tels que :
$\left\|3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$.

EXERCICE N°11

Soient les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;1)$, $C(0;-1;-1)$, $D(-1;1;-1)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
1°) a) Calculer l'aire du triangle ABC.
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
c) Vérifier que D n'appartient pas au plan (ABC).



2°) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite (Δ) et du plan (ABC).
c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

3°) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
4°) a) Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P) du segment [DC].
b) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ') d'intersection des plans (P) et (ABC)

EXERCICE N°12

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Soient les points A(6;0;0), B(0;6;0).
1°) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points pondérés (O;1), (A;2), (B;3).
2°) Soit le point C(0;0;4). On note S l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC} = 0$ *Déterminer une équation cartésienne de S.*
Quelle est la nature de S ? Précisez ses éléments.
3°) P est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$
a) Montrer que G appartient à P.
b) Montrer que M appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{MG}.\vec{u} = 0$ *,* $\vec{u}$ *désignant le vecteur* $2\vec{i} - 3\vec{j}$ *.*
En déduire la nature et une équation de l'ensemble P.