

EXERCICE N°1

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur $[0, a]$ par :

$$\text{Pour tout } x \in [0, a], f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}.$$

- 1°) Montrer que f_a réalise une bijection de $[0; a]$ sur $[0; \frac{1}{a}]$. On note f_a^{-1} sa bijection réciproque.
- 2°) Donner le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.
- 3°) Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1$

- 1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$
- 2°) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3°) Sur quel ensemble f^{-1} est-elle continue ?
- 4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$
- 5°) Montrer que l'équation $f(x) = x + 2$ admet une solution unique $\alpha \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$.

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$

- 1°) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 .
- 2°) Etudier les variations de f .
- 3°) Montrer que f est une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on déterminera.
- 4°) Expliciter la fonction réciproque g de f et déterminer la fonction dérivée de g .

EXERCICE N°3

Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

- 1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2°) Etudier la dérivabilité de f sur D_f .
- 3°) Montrer que f est une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera
- 4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

EXERCICE N°4

Soit $f : x \mapsto f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1°) Etudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .
- 2°) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera
- 3°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$
- 4°) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(1)$.

EXERCICE N°5

Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

- 1°) Etudier les variations de f .
- 2°) Montrer que f est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle I que l'on déterminera.
- 3°) On désigne par g la fonction réciproque de f . Calculer : $g(1)$, $g(\sqrt{2})$ et $g(2)$.
- 4°) Montrer que g est dérivable sur I et que : $\forall x \in I : g'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$



5°) Soit h la fonction numérique définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = f(x) + \frac{1}{4}$

Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique x_0 telle que : $\frac{\pi}{3} < x_0 < \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE N°6

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x)$

1°) Déterminer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2°) Prouver que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

3°) Soit g la fonction réciproque de f .

(a) Préciser D_g et calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(\sqrt{3})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(b) Montrer que $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

(c) Montrer que la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R}

4°) Soit k la fonction définie sur \mathbb{R} par : $k(x) = g(x^2) - g(\pi x)$

(a) Calculer $k'(x)$ en fonction de x .

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x^2) - g(\pi x)}{x - \pi}$

5°) Déterminer le sens de variation des fonctions u et v définies par :

$u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - g(x)$ et $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \frac{x^3}{3} - g(x)$

6°) En déduire que pour tout x de \mathbb{R}_+ on a : $0 \leq x - g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

EXERCICE N°7

On considère la fonction f définie sur $[-1, 1] - \{0\}$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé \mathbb{R} .

Partir A

1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et interpréter les résultats obtenus

2°) Étudier la dérivabilité de f en point d'abscisse $x=1$ et interpréter le résultat obtenu.

3°) Étudier la dérivabilité de f en point d'abscisse $x=-1$ et interpréter le résultat obtenu.

4°) Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[- \{0\} : f'(x) = \frac{-1}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$

5°) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

6°) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

7°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

8°) Représenter dans le même repère \mathbb{R} la courbe C et C' de f^{-1} .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(\cos x)$

1°) Montrer que pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = 1 + \tan(x)$

2°) Étudier le sens de variation de la fonction g .

3°) Montrer que l'équation : $g(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifier que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

5°) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera



6°) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et $\forall x \in K : (g^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$

EXERCICE N°8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \begin{cases} x^3 + 12x + 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \sqrt{1+x^2} - x & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

1°) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2°) Etudier la continuité de f sur D_f

3°) Etudier la dérivabilité de f en 0 .

4°) Calculer $f'(x)$ puis dresser la tableau de variation de f .

5°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 0]$ une solution unique α .

Vérifier que $\alpha \in \left] \frac{-1}{12}, 0 \right[$

6°) Soit g la restriction de f sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g .

i) Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J

ii) Expliciter $g^{-1}(x)$; pour tout x de J .

EXERCICE N°9

Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f .

3°) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 , définir ce prolongement.

EXERCICE N°10

Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \sqrt[3]{2 \cos x - 1}$

1°) Etudier la dérivabilité de f sur $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$.

2°) Montrer que f est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur $[0, 1]$.

3°) Soit f^{-1} la réciproque de f , calculer $(f^{-1})'(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1})$

4°) Préciser le domaine K de la dérivabilité de f^{-1} .

5°) Déterminer l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour tout x de K .

