

EXERCICE N°1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x^2 + 1}$

1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2°) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et en déduire que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - x$.

3°) Soit $Q(x) = 4x^3 + 3x - 1$, étudier les variations de Q sur \mathbb{R} et démontrer que l'équation $Q(x) = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} dont on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

4°) En déduire le signe de $Q(x)$ puis le signe de $f'(x)$.

5°) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

6°) Tracer la courbe (ζf) de la fonction f .

EXERCICE N°2

Partie A

Soit P la fonction polynôme définie sur \mathbb{R} par : $P(x) = x^3 - 3x + 4$.

1°) Etudier les variations de P .

2°) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3°) En déduire le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = x + 2 + \frac{3x - 2}{x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité 1 cm)

1°) Démontrer que la courbe C_f admet deux asymptotes que l'on précisera. Préciser la position de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x + 2$.

2°) Démontrer que $f'(x) = \frac{P(x)}{x^3}$ et en déduire le sens de variation de f .

3°) Déterminer le ou les points où la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ .

4°) Tracer la courbe C_f , la droite Δ et les autres renseignements obtenus sur C_f .

EXERCICE N°3

Partie I.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ où a, b et c sont des réels.

On désigne par (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les réels a, b et c pour que :

- La courbe (ζf) passe par le point $A(0, -1)$
- La fonction f admet un extremum en 0
- La courbe (ζf) admet au point d'abscisse 1 une tangente de coefficient directeur (-3)

Partie II.

On donne $a = 1, b = -1$ et $c = 2$.

1°) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2°) Préciser les extremum de f .

3°) En utilisant les variations de f comparer les nombres : $A = \frac{2008 \times 2007 + 2}{2006}$ et $B = \frac{2009 \times 2008 + 2}{2007}$

EXERCICE N°4

Soit f une fonction vérifiant

1. f définie et continue sur \mathbb{R}
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$



4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$
5. Pour tout $x \in]-\infty, 1[$: $f(x) > x$
6. Pour tout $x \in]-\infty, 1[$: $f'(x) > 0$
7. Pour tout $x \in]1, +\infty[$: $f'(x) < 0$
8. $f(1) = 3$

1°) Interpréter géométriquement les points: 2, 3, et 4.

2°) Dresser le tableau de variations de f .

3°) Tracer l'allure de (ζf) où (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

EXERCICE N°5

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^4 - 4x - 3$

1°) Etudier les variations de g .

2°) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur \mathbb{R} telles que : $\alpha < 0 < \beta$.

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et de β .

c) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$

1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) a) Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que pour tout $x \neq 1$: $f(x) = ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$

b) En déduire que la courbe C_f représentative de f admet une asymptote oblique que l'on indiquera.

c) Préciser la position de C_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3°) a) Démontrer que $f'(x) = \frac{x^2 g(x)}{(x^3 - 1)^2}$

b) En déduire les variations de f .

4°) En utilisant les encadrements de la partie A, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$.

5°) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 .

6°) Dresser le tableau de variation complet de f et tracer C_f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 4}$. On désigne par (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1°) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$ et interpréter géométriquement le résultat.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$. Interpréter géométriquement le résultat.

2°) Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.

3°) Tracer la courbe (ζf) de la fonction f .

4°) Montrer que f est une bijection de $[2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

5°) a) Sur quelle intervalle K , f^{-1} est continue

b) Etudier les variations de f^{-1}

6°) Construire la courbe (ζf^{-1}) de la fonction f^{-1} dans le même repère.

7°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

EXERCICE N°8 : On considère la fonction f définie sur $[-1, 1] - \{0\}$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé \mathbb{R} .

1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et interpréter les résultats obtenus

2°) Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse $x=1$ et interpréter le résultat obtenu.

3°) Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse $x=-1$ et interpréter le résultat obtenu.



4°) Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[- \{0\} : f(x) = \frac{-1}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$

5°) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

6°) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

7°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

8°) Représenter dans le même repère R la courbe C et C' de f^{-1} .

EXERCICE N°9 : On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé R .

Partir A

1°) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

2°) Vérifier que $I(0, 1)$ est un centre de symétrie pour C .

3°) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une unique solution α dans R et vérifier que : $1 < \alpha < 2$

4°) Ecrire l'équation de la tangente T à C au point I .

5°) Etudier la position relative de T et C .

6°) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

7°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

8°) Représenter dans le même repère R la courbe C' de f^{-1} .

Partie B

On considère la fonction g définie sur R par : $g(x) = 1 + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

On note par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé R .

1°) Etudier la parité de g .

2°) Etudier les variations de g sur $[0, +\infty[$.

3°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x - 1)$. Que peut-on conclure ?

4°) Construire C_1 dans un autre repère R' .

Partie C

On considère la fonction f_n définie sur R par : $f_n(x) = 1 + \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ où $n \in N^*$

et $f_0(x) = f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1°) Etudier les variations de f_n pour tout n de N^*

2°) Etudier suivant n , les limites suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

Interpréter les résultats obtenus

3°) Montrer que les courbes (C_k) passent par deux points fixes

EXERCICE N°10 : Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1°) Montrer que f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

2°) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat obtenu.

3°) Dresser le tableau de variation de f .

4°) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5°) Montrer que pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2x}$

6°) On désigne par C et C' les courbe respectives de f et f^{-1} dans même repère orthonormé. montrer que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote oblique à C .

7°) Tracer C et C' .

8°) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$

a) Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}$

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et pour tout x de K : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

