EXERCICE N°1

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2+3x}{1+x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-x+x^2}{1+x-2x^2}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-3x+1\right)$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$; $\lim\limits_{x\to0}x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}-2\right)$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2\pi x-1}{3x-2}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$

, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos(x)-1}{4\sin^2(x)-3}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x+\cos^2 x}{\sin x+\cos^2 x-1}$.

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $[\,2\,;+\infty\,[$ *par :* $f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$.

Montrer que , pour tout $x\geq 2$, $|f(x)-3|\leq\dfrac{4}{x-1}$. *En déduire la limite de f en* $+\infty$

EXERCICE N°3

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos x}$.

1°)) Montrer que, pour tout réel x, $\dfrac{1}{3}\leq f(x)\leq 1$.

b) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(2-\cos x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{2-\cos x}$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2(2-\cos x)}$

EXERCICE N°4

Soit la fonction $f:x\mapsto 3x+2\sin x$

1°)a-Montrer que pour tout x de R : $3x-2\leq f(x)\leq 3x+2$

b-En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2°)Soit la fonction g défini sur R par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{f(x)} & si\quad x\neq0\\ \dfrac{1}{5} & si\quad x=0\end{cases}$

a- Montrer que g est continue en 0.

b- Montrer que pour tout $x\in\left]\dfrac{2}{3},+\infty\right[$: $\dfrac{x}{3x+2}\leq g(x)\leq\dfrac{x}{3x-2}$

c- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$. *Interprète géométriquement le résultat.*

EXERCICE N°5

Soit la fonction φ *définie sur* $[0\,;+\infty[$ *par :* $\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\cos x}{1+\sqrt{x}}$.

1°) Montrer que, pour tout x strictement supérieur à 0, on a : $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\leq\varphi(x)\leq 1$

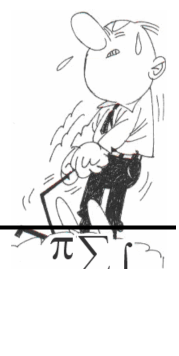
2°) En déduire la limite de φ *en* $+\infty$.

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *par :* $f(x)=\dfrac{-x+\cos x}{2x+1}$

1°)Démontrer que pour tout $x>-\dfrac{1}{2}$ *on a :* $\dfrac{-x-1}{2x+1}\leq f(x)\leq\dfrac{-x+1}{2x+1}$

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$.



EXERCICE N°11

Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si \quad x\neq 0\\ a \quad si \quad x=0\end{cases}$ où $a\in R$

1°)Déterminer le domaine de définition de f .
2°)Pour quelle valeur de a, f est continue en 0 .
3°)Préciser suivant a, l'ensemble de continuité de f
4°)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.f(x)+1-x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}.f(x)$

EXERCICE N°12

Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2x-3} & si \quad x\leq 1\\ \dfrac{2m-x}{2-x} & si \quad 1<x\leq\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{x^2+1}{x^2+2x-4} & si \quad x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$

1°)Trouver m pour que f soit continue en 1 .
2°)Pour la valeur du réel m trouvée. Etudier la continuité da f en $x_0=3/2$.

EXERCICE N°13 : Soit $f(x)=\begin{cases}(1+3a)x^2-3x & si \quad x\in\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\\ \dfrac{x^3-8}{2x^2-5x+2} & si \quad x\in\left]\dfrac{1}{2},2\right[\\ \sqrt{4x^2-1}-ax-1 & si \quad x\in\left[2,+\infty\right[\end{cases}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f .
2°)Etudier les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

3°)Peut-on déterminer a pour que f soit continue en 2 .
4°)Préciser suivant a, l'ensemble de continuité de f .

EXERCICE N°14

Répondre par Vrai ou Faux.

1°)Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ *et si, pour tout réel x, f(x) > g(x), alors* $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=+\infty$

2°)Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ *et si g(x)< 0 pour tout x, alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=-\infty$.

3°)Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *, alors soit* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ *, soit* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

EXERCICE N°15

On admet l'existence d'une limite réelle en 0 pour $f(x)=\dfrac{sin(x)-x}{x^3}$

1°) En transformant convenablement f(2x), trouver la valeur de cette limite.

2°) Utiliser le résultat précédent pour déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tan(x)-x}{x^3}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos(x)-\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$

EXERCICE N°16

1°)Démontrer que l'équation : $x^3+x-3=0$ *admet une unique solution* $a\in\left]1;2\right[$

2°)Utiliser la dichotomie pour donner une valeur approchée par défaut de cette α *à* 10^{-1} *près .*

EXERCICE N°17

Montrer que l'équation $x^3-5x^2+4x+7=0$ *admet au moins une racine réelle. Plus généralement, montrer que toute équation polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle. Qu'en est-il si le degré est pair ?*