EXERCICE N°1

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$

Partie A

1°) Calculer u_1 *et* u_2 *. u est-elle une suite géometrique ? u est-elle une suite arithmétique ?*
2°)Montrer que : pour tout n de N : $2 \le u_n \le 5$ *.*
3°)Montrer que (u) est croissante sur N .
4°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 5$ *.*
1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique
2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*
3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

4°)Soit pour tout n de N : $s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ *et* $s'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

a- Exprimer s_n *puis* s'_n *en fonction de n*
b- Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} s'_n$

EXERCICE N° 2

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n} \end{cases}$

Partie A

1°)Montrer que : pour tout n de N : $0 < u_n \le 1$ *.*
2°)Montrer que (u) est croissante sur N .
3°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$ *.*
1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique
2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*
3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

EXERCICE N° 3

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+{u_n}^2}{2}} \end{cases}$

Partie A

1°)Montrer que : pour tout n de N : $u_n \ge 1$.
2°)Montrer que pour tout n de N : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-{u_n}^2}{2(u_{n+1}+u_n)}$
3°)En déduire le sens de variations de (u).
4°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = {u_n}^2 - 1$ *.*
1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique
2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*
3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

EXERCICE N°4

Soient a et b deux réels tels que $0<a \le b$ *et* (u_n) *la suite définie par :*

$u_1 = a+b$ *et* $\forall n \in N^* : u_{n+1} = a + b - \dfrac{ab}{u_n}$.

1°) On suppose que a<b.

- *(a) Montrer que* (u_n) *est minorée par b .*
- *(b) Etudier la monotonie de la suite* (u_n) *en déduire qu'elle est convergente.*

2°) Soit v la suite définie par : $\forall n \in N^* : v_n = \dfrac{u_n - b}{u_n - a}$

- *(a) Montrer que v est une suite géométrique.*
- *(b) En déduire* u_n *en fonction de n , a et b*
- *(c) Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3°) On suppose que a=b .

- *(a) Calculer* u_1, u_2, u_3, u_4 *en fonction de a .*
- *(b) Exprimer alors* u_n *en fonction de n et a puis* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°5

On considère la suite réelle (u_n) *définie par :* $u_0 = 3$ *et* $\forall n \in N : u_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{u_n}$

1°)Montrer que (u_n) *est minorée par 2 .*

2°)Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3°)En déduire que (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

4°)Montrer par récurrence que : pour tout n de N : $u_n = 2 + \dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

5°)Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°6

Soit la fonction $f : R_+ \to R,\ x \mapsto f(x) = \sqrt{4+3x}$.

On considère la suite réelle u définie par $u_0 = 0$ *et* $\forall n \in N : u_{n+1} = f(u_n)$

1°)(a) Montrer que : $\forall n \in N : 0 \le u_n \le 4$

(b) Etudier la monotonie de u .

(c) En déduire que u est convergente .

2°)(a) Montrer que : $\forall n \in N,\ |u_{n+1} - 4| \le \dfrac{3}{4}|u_n - 4|$

(b) En déduire : $\forall n \in N,\ |u_n - 4| \le 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ *. En déduire alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°7

Soient $(u_n)_{n\in N}$ *et* $(v_n)_{n\in N}$ *deux suites réelles définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} \end{cases}$ *et* $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + u_n}{4} \end{cases}$

1°) Calculer u_1 *et* v_1 *,* u_2 *et* v_2 *.*

- *u est-elle une suite géométrique ? u est-elle une suite arithmétique ?*
- *v est-elle une suite géométrique ? v est-elle une suite arithmétique ?*

2°) On pose, pour tout entier naturel n : $x_n = u_n - v_n$ *.*

- *Montrer que (x) soit une suite géométrique*
- *Exprimer* x_n *en fonction de n.*

3°)Montrer que pour tout n de N : $u_n \le v_n$

4°)Montrer que (u) est croissante sur N et (v) est décroissante sur N

5°)En déduire que pour tout n de N : $u_n \le 3$ *et* $v_n \ge 2$

6°)En déduire que (u) et (v) convergent vres le même limite.