EXERCICE N°1

1°)Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ *par :* $g(x) = x\ln(x) - x + 1$.

- a) *Etudier le sens de variations de g*
- b) *En déduire le signe de g .*

2°)On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

- a) *Etudier les limites de f en* $+\infty$ *et en 1 .*
- b) *Dresser le tableau de variation de f .*
- c) *Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm)*

EXERCICE N°2

Partie A

Étude de la fonction f définie sur R_+^* *par :* $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

On appellera C sa courbe représentative.
1°)Étudier la limite de f en $+\infty$ *et en 0*
2°)Étudier les variations de f ; en dresser le tableau de variations.
3°)Déterminer la valeur de x telle que f(x) = 0.
4°)Écrire l'équation de la tangente T à C en ce point.
5°)Tracer C et T.

Partie B

1°)Montrer qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ *est* $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.
En déduire l'ensemble des primitives F de f.
2°)Déterminer la primitive de f qui s'annule pour x = 1.
Cette primitive sera appelée F_1.
3°)Déduire de la partie A le sens de variation de F_1 *; déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, dresser le tableau de variations et donner les intersections de la courbe représentative de* F_1 *avec (x´x).*
4°)Représenter graphiquement F_1.
4°)On appelle F_2 *la primitive de f qui prend la valeur 0,5 pour x = 1. Donner l'expression de* F_2.
Expliquer la construction de la courbe représentative de F_2 *à partir de celle de* F_1. *Tracer la courbe représentative de* F_2.

EXERCICE N°3

1°)Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$

- a) *Etudier les variations de f*
- b) *En déduire que pour tout* $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$

2°) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

- a) *Etudier les variations de f*
- b) *En déduire que pour tout* $x \geq 0$: $\ln(x+1) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

3°)Etudier la limite éventuelle en 0^+ *de* $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

EXERCICE N°4

Soit f définie sur]–1, 1[par $f(x) = (1 - x^2).\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$. *Montrer que f est continue.*
1°)Etudier la parité de f
2°)Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur [–1, 1].

EXERCICE N°5

Partie A

On considère la fonction g définie sur]0 ; +∞[par : $g(x)= x^2 - \dfrac{1}{x^2} - 4 \ln x$

1°) Etudier les variations de g. Préciser g(1).
2°) En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles]0 ;1[et]1 ; +∞[.

Partie B

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$.

1°) Monter que, pour tout réel x > 0, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2°) Déterminer la limite de f en +∞ (on pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression f(x)).
Déterminer la limite de f en 0.

3°) Montrer que pour tout réel x > 0 , $f'(x) = \dfrac{1}{2x} g(x)$.

En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞[.
4°) On nomme C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé ; unité graphique 5 cm. Tracer C.

Partie C

1°) Montrer que l'équation f(x) = x admet une seule solution sur l'intervalle]0 ; 1[(on pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur]0 ;1[par h(x) = f(x) – x).
On nomme α cette solution.

2°) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *admet une seule solution sur l'intervalle]1 ; +∞[.*

On nomme β cette solution. Montrer que $\alpha.\beta = 1$.
3°) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}. En déduire un encadrement de α

EXERCICE N°6

Partie A

On considère la fonction g définie sur]0 ; +∞[par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.

1°) a) Montrer que $g'(x) = \dfrac{P(x)}{x}$, *où P est un polynôme de degré 3.*
b) Vérifier que P(1) = 0. Factoriser P.
c) Étudier le sens de variation de g. (On ne demande pas le calcul des limites en 0 et en +∞)
2°) Déduire de la question précédente le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x + \ln x}{x^2}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).
1°) a) Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers 0.
b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \ln x}{x^2} = 0$. *En déduire la limite de f(x) quand x tend vers +∞.*
c) Justifier que les droites (D) et (D') d'équations respectives : x = 0 et y = x + 1 sont asymptotes à la courbe (C).
2°) a) Démontrer que la fonction h telle que h(x) = x + ln x est strictement croissante sur]0 ; +∞[et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.
b) En déduire que (D') coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant : $\alpha + \ln \alpha = 0$.
Démontrer que : $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$.
3°) Étudier le sens de variation de f.
4°) Déduire du 3° l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$.
Démontrer que : $0{,}46 < \beta < 0{,}47$.
5°) Construire (C) et (D').

EXERCICE N°7

Le plan P est muni d'un repère orthonormal. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *(unité graphique 3 cm).*

1°)On considère la fonction définie sur [0,+∞[par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Montrer que f est continue.

2°)Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$

a) Etudier le sens de variation de g.

b) Calculer g(0) et en déduire que sur R^+ : $ln(1+x)\leq\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$

c) Par une étude analogue, montrer que si $x\geq 0$, alors $ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$

d) Établir que pour tout x strictement positif on a: $-\frac{1}{2}\leq\frac{ln(1+x)-x}{x^2}\leq-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0)=-\frac{1}{2}$

3°) Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $h(x)=\frac{x}{x+1}-ln(1+x)$

a) Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que sur $[0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$

d) On désigne par (ζf) la représentation graphique de f dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$

Construire la tangente T à (ζf) au point d'abscisse 0.
Montrer que (ζf) admet une asymptote. Tracer la courbe (ζf).