Séries d'exercices $4^{ème}$ *inf*
INTEGRATIONS

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

EXERCICE N°1

Calculer les intégrales suivants :

$$\int_0^4 |t-2|dt \ , \ \int_{-1}^2 (x-|x-1|)dx \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)dt \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)dx \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2(x)dx \ , \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(tx)dt \ , \int_{-1}^1 \frac{x^{2009}}{x^{14}+1}dx \ ,$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin(t)dt \ , \ \int_0^1 t\sqrt{1-t}dt \ , \ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x-\sin x}{x} \ , \ \int_0^1 (2t+1)\sin\pi(t^2+t+1)dt$$

EXERCICE N°2

Soient $I=\int_1^2 \frac{x^2+2x}{(2x+1)^2(1-4x)}dx$ *et* $J=\int_1^2 \frac{2x^2+1}{(2x+1)^2(1-4x)}dx$.

1°) Calculer $K = 2I + J$ *et* $L = 2I - J$.
2°) En déduire I et J.

EXERCICE N°3

Soit k un nombre réel. On considère la fonction f_k *définie sur]0 ; 1] par :* $f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx$.
On note C_k *la courbe représentative de la fonction* f_k *dans le plan rapporté au repère orthonormal* $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ *(unité graphique : 10 cm).*
On note I, J et L les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 1).
Soit α *un nombre réel tel que :* $0 < \alpha \le 1$.

1°)*On pose :* $I(\alpha) = \int_\alpha^1 x(\ln x)^2\,dx$.

a) *Déterminer, en effectuant deux intégrations par parties successives, que :*
$$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 + \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$
b) *Déterminer la limite de* $I(\alpha)$ *lorsque* α *tend vers 0.*

2°) *a) On pose :* $S_k(\alpha) = \int_\alpha^1 f_k(x)dx$.

Exprimer $S_k(\alpha)$ *en fonction de* α. *En déduire la limite de* $S_k(\alpha)$ *lorsque* α *tend vers 0.*
On admettra que cette limite représente l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine plan limité par la courbe C_k*, l'axe (Ox) et la droite d'équation* $x = 1$.
b) *En déduire que les courbes* C_0, $C_{1/2}$ *et* C_1 *partagent le carré OILJ en quatre parties de même aire.*

EXERCICE N°4

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]-1 ; +∞[par : $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.

1°) a) Calculer les limites de f(x) aux bornes de son ensemble de définition.
b) Calculer f'(x), étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

2°) Calculer f(0). Montrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α*, appartient à* $[-0{,}72, -0{,}71]$.

3°) Donner le signe de f(x), pour x appartenant à]-1 ; +∞[.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble]-1 ; 0[∪]0 ; +∞[par : $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1°) Calculer les limites de g(x) quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

2°)Calculer : $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

3°) Calculer g'(x) et déduire , à l'aide de la partie A, son signe.

4°)Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. *En déduire une valeur approchée de g(α) en prenant* $\alpha = -0{,}715$.

5°)Dresser le tableau de variation de la fonction g.

6°)Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

7°)Soit a un réel strictement supérieur à 1. On note D(a) le domaine du plan délimité par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = a.

a) Soit h la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $h(x) = \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$

Montrer que $h'(x) = \dfrac{1}{x} - g(x)$ *et en déduire une primitive de g sur]0 ; +∞[.*

b) Déterminer, en fonction de a, l'aire A(a) du domaine D(a) en cm².

c) Calculer $\lim\limits_{a \to +\infty} A(a)$

EXERCICE N°5

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ *d'unité graphique 2 cm.*

Partie I

Soit f l'application définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = x - 4 + \dfrac{\ln x}{4}$ *et* C_f *sa courbe représentative.*

1°) Calculer les limites de f aux bornes de]0 ; +∞[.
Justifier que C_f *admet une asymptote et en donner une équation.*

2°) a) Etudier les variations de f sur]0 ; +∞[et dresser son tableau de variations
b) En déduire que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α appartenant à [3 ; 4].
c) Tracer C_f.

3°) Soit D le domaine limité par C_f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = α et x = 4.*
a) Calculer, pour x > 0, la dérivée de $x \mapsto x\ln x$.
En déduire une primitive de f.
b) En utilisant le résultat du a), exprimer l'aire en cm² du domaine D à l'aide d'un polynôme du second degré en α.

Partie II

Dans cette partie, I désigne l'intervalle [3 ; 4].

1°) Soit g l'application définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = 4 - \dfrac{\ln x}{4}$.

a) Montrer que α est solution de l'équation g(x) = x.
b) Montrer que si $x \in I$ *alors* $g(x) \in I$.
c) Montrer que pour tout x de I, $|g'(x)| \le \dfrac{1}{12}$.

2°) Soit $(u_n)_{n \in N}$ *la suite définie par :* $u_0 = 3$ *et pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} = g(u_n)$.
a) En utilisant II-1° b), montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, u_n *est élément de I.*

b) Prouver que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{12}|u_n - \alpha|$.

En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n : $|u_n - \alpha| \le \dfrac{1}{12^n}$.

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in N}$ *?*

c) Trouver le plus petit entier n_0 *tel que :* $\dfrac{1}{12^{n_0}} \le 10^{-3}$.

En déduire que u_3 *est une valeur approchée de α à* 10^{-3} *près et donner une valeur de α à* 10^{-3} *près.*

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ *par :* $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$

on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale : $I=\int_0^{1/2}\frac{e^{-x}}{1-x}dx$

1°) En étudiant les variations de la fonction f, démontrer pour tout nombre réel x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ *:* $1\le f(x)\le\frac{2}{\sqrt{e}}$.

2°) a) Démontrer que, pour tout x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$.

b) En déduire que : $I=\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}\,dx+\int_0^{1/2}x^2 f(x)\,dx$

c) Calculer à l'aide d'une intégration par partie : $J=\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}\,dx$

d) Déduire de (1) que : $\frac{1}{24}\le\int_0^{1/2}x^2 f(x)\,dx\le\frac{1}{12\sqrt{e}}$

e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à la précision 0,01..