EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x^2 e^{2x}$.

a) *Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction F définie sur R par : $F(x) = (ax^2 + bx + c) e^{2x}$ soit une primitive de f sur R.*

b) *En déduire la primitive de f sur R qui s'annule en x = 0.*

EXERCICE N°2

Partie A

1°)Étudier le signe du polynôme $P(X) = -8X^2 + 2X + 1$ où X est un réel.

2°)Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = -8e^x + e^{-x} + 2$

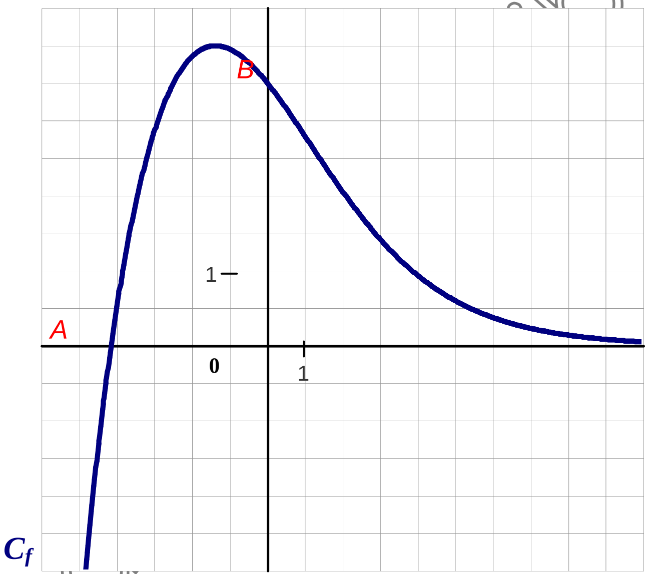
a)Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{-8e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x}$

b)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-8e^x + 2e^x + 1 = 0$, en déduire les solutions de l'équation g(x)=0.

c)Étudier le signe de la fonction g sur R.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = \dfrac{8 - e^x}{1 + e^x}$. Sa courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1°)Calculer les coordonnées des points A et B intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.

2°)Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe C_f.

3°)Calculer f '(x).

4°)Étudier les de variations de f sur R

5°)Donner les équations des tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses -3ln2 et 0.

EXERCICE N°3 :

Soit f la fonction définie sur R par :$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie I

Soit g la fonction définie sur R par :$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1) *Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.*
2) *Etudier le sens de variation de g.*
3) *Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans R, puis justifier que : $0,35 \le \alpha \le 0,36$.*
4) *En déduire le signe de g.*

Partie II

1) *Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.*

2) Calculer $f'(x)$. En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de f.
3) Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ et déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}.
4) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
Préciser la position de (C) par rapport à Δ.
5) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.
6) Tracer Δ, T et (C).

EXERCICE N°4 :

On appelle f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O ;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1°) a) Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$ et $f''(x)$.
b) Etudier le sens de variation de la dérivée f'.
Démontrer que pour tout réel x positif, $f'(x) > 0$.
c) Calculer la limite de f en $+\infty$.
d) Dresser le tableau de variation de f.
2°) a) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) et préciser la position relative de D et (C).
b) Montrer que la courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite D.
Déterminer les coordonnées de A.
3°) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une unique solution notée α.
Vérifier que $0 < \alpha < 1$.
4°) a) Construire la droite D, le point A défini en 2°b), la courbe (C) et la tangente en A à la courbe (C).
b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

EXERCICE N°5

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal; $(O ;\vec{i},\vec{j})$ unité graphique : 4 cm.

Partie A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1°)Étudier le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2°)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0 ; +\infty[$.

On note α cette solution.

b) Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

3°)En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1°) a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

2°)a) Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3°)a) Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A.2., donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4°)Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5°) a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$,

$f(x) - x = \dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ *avec* $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

En déduire le signe de u(x).

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

6°)Tracer (C) et (T).