

EXERCICE N°1

1°) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_0 = 3i + \frac{1}{i} - 2, \quad z_1 = (1+i)^2, \quad z_2 = (1-2i)^2, \quad z_3 = \frac{1}{3+2i}, \quad z_4 = \frac{1+2i}{2-3i}.$$

2°) Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_0 = 3i - 2, \quad z_1 = (2+i)^2, \quad z_2 = \frac{1}{5+2i}, \quad z_3 = \frac{2-i}{i+3}, \quad z_4 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$$

EXERCICE N°2

Soit $z = 1 - 2i$ et $z' = -1 + 3i$

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes suivants : $Z_0 = z \times z'$, $Z_1 = \bar{z} \times \bar{z}'$,

$$Z_2 = z^2 \times \bar{z}', \quad Z_3 = \frac{z-3}{z'+2i}$$

EXERCICE N°3

z désigne un nombre complexe différent de $2i$.

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique: 3 cm). On désigne par A le point d'affixe $2i$. A tout point M du plan, distinct de A , d'affixe z , on associe le point M' , d'affixe z' définie

$$\text{par } z' = \frac{z+2i}{z-2i}.$$

1°) Calculer l'affixe du point N' image par f du point N d'affixe $\sqrt{3} + i$

2°) Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe $1+i$.

3°) Soit un complexe z distinct de $2i$, on pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' réels.

$$\text{Démontrer que : } x' = \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + (y-2)^2} \text{ et } y' = \frac{4x}{x^2 + (y-2)^2}$$

4°) Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :

a) z' est réel

b) z' est de module 1

EXERCICE N°4

Soit $Z = \frac{z+1}{z-2i}$ avec $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$

1°) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .

2°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit un réel.

3°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit imaginaire pur.

EXERCICE N°5

$$\text{Soient } z_1 = \frac{2009+i2008}{2009-i2008} \text{ et } z_2 = \frac{2009-i2008}{2009+i2008}$$

Montrer que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

EXERCICE N°6

Soit a, b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que: $a + b + c = 1$. Calculer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

EXERCICE N°7

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on considère les points A, B et C

d'affixes respectives $z_A = 1+i, z_B = 3+i$ et $z_C = 1-2i$.

1°) Placer les points A, B et C

2°) Calculer $|z_A - z_B|, |z_A - z_C|$ et $|z_B - z_C|$.

3°) En déduire la nature du triangle ABC .

4°) Déterminer l'affixe de point D tel que $ABDC$ soit un rectangle.

EXERCICE N°8

Soit z un nombre complexe tel que $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1°) Déterminer le plan complexe, l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z^2 est un réel.



2°) Déterminer le plan complexe, l'ensemble F des points M d'affixe z tel que $|z|=1$.

EXERCICE N°3

1°) Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants

a) $z_0 = -3$, b) $z_1 = 3 + 4i$, c) $z_2 = i$

2°) Résoudre alors dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$a) z^2 + z + 1 = 0, b) z^2 - \sqrt{3}z - i = 0, c) iz^2 + (1+i)z + \frac{1}{4} = 0$$

EXERCICE N°9

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 3z_1 - iz_2 = -i \\ 2iz_1 + z_2 = i \end{cases}$$

EXERCICE N°10

A tout complexe z on associe le complexe : $P(z) = 2z^2 + z + 5\bar{z}$.

1°) Calculer $P(1+i)$.

2°) Démontrer que si $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

alors l'équation $P(z) = 0$ équivaut au système :
$$\begin{cases} x(x+3) - y^2 = 0 \\ (x-1)y = 0 \end{cases}$$

3°) En déduire la résolution dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE N°11

On considère l'équation (E) : $z^2 + z + 1 + i = 0$

On note par z_1 et z_2 les racines de (E).

1°) Déterminer les racines carrées de nombre complexe : $b = -3 - 4i$

2°) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E).

3°) Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle z_1 et z_2

4°) Soit z un nombre complexe : $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $Z = \frac{z - z_1}{z - z_2}$

Soit M d'affixe z

- Ecrire Z sous forme cartésienne
- Déterminer l'ensemble des points M tel que Z est un réel.
- Déterminer l'ensemble des points M tel que Z est imaginaire pur.

5°) On considère l'équation (E') : $z^3 + (1-i)z^2 + z + 1 - i = 0$

- Vérifier que i est une racine de l'équation (E').
- Déterminer a et b tel que $z^3 + (1-i)z^2 + z + 1 - i = (z-i)(z^2 + az + b)$
- Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E')

6°) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :
$$\left(\frac{z-2i}{z+1}\right)^3 + (1-i)\left(\frac{z-2i}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+1}\right) + 1 - i = 0$$

EXERCICE N°12

Soit $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1°) Calculer $P(1+i)$.

2°) Démontrer que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera.

3°) Déterminer les réels a , b et c tels que : $P(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$ pour tout complexe z .

4°) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans \mathbb{C} .

5°) Soient A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = 2i$.

- Faire une figure. Démontrer que A, B et C sont sur un même cercle de centre O .
- Calculer $\overrightarrow{z_B - z_A}$ et $\overrightarrow{z_B - z_C}$, en déduire que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

EXERCICE N°13

On considère le polynôme P défini sur \mathbb{C} par : $P(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$.

1°) Justifier que : $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

En déduire que si z_0 est une racine de P , alors son conjugué est aussi une racine de P .

2°) a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines imaginaires pures.

b) Déterminer la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation précédente.



3°) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives $-2i, 2i, -1+i$ et $-1-i$.

a) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe et démontrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un trapèze isocèle.

b) Démontrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 appartiennent à un même cercle de centre A d'affixe 1 dont on précisera le rayon.

EXERCICE N°14

On considère l'équation (E) : $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0$.

1°) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure.

2°) Résoudre alors (E) dans \mathbb{C} .

EXERCICE N°15

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^3 + (2-3i)z^2 - (7+i)z + 17i - 2 = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

EXERCICE N°16

1°) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 - 2Z - 3 = 0$

2°) Résoudre dans \mathbb{C} l'équations : $z + \frac{1}{z} = -1$ et $z + \frac{1}{z} = 3$

3°) On considère l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$.

a) Vérifier que (E) est équivalente au système :
$$\begin{cases} Z = z + \frac{1}{z} \\ Z^2 - 2Z - 3 = 0 \end{cases}$$

b) En déduire la résolution de (E) dans \mathbb{C} .

EXERCICE N°17 (BAC)

Partie A :

On considère dans \mathbb{C} : $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ où a, b et c sont des réels.

1°) a) Montrer que si $f(2)=0$ et $f(1-i)=0$ alors a, b et c vérifient le système : (S) :
$$\begin{cases} 4a + 2b + c + 8 = 0 \\ b + c - 2 = 0 \\ 2a + b + 2 = 0 \end{cases}$$

b) Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système (S).

2°) Dans la suite on prend $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

a) Vérifier que pour tout nombre complexe z , on a : $f(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on considère les points A et B d'affixes

respectives 2 et $1-i$.

1°) Montrer que le triangle OAB est rectangle en B .

2°) Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Montrer que $OABC$ est un carré.

