EXERCICE N°1

Sans utiliser une calculatrice, calculer le réel :

1°) $\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{14} - \sin\frac{3\pi}{7}$

2°) $\tan\frac{\pi}{9} + \tan\frac{2\pi}{9} + \tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{4\pi}{9} + \tan\frac{5\pi}{9} + \tan\frac{2\pi}{3} + \tan\frac{7\pi}{9} + \tan\frac{8\pi}{9}$

3°) $\cos^2\frac{\pi}{5} + \cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{3\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5}$

4°) $\tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{5\pi}{12} + \cot an\frac{\pi}{5}.\tan\frac{4\pi}{5}$

5°) $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$

6°) $\cos^2\frac{2\pi}{8} + \cos^2\frac{4\pi}{8} + \cos^2\frac{6\pi}{8} + \cos^2\frac{8\pi}{8}$

7°) $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$

EXERCICE N°2

1°)On remarquant que l'on a : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$

2°)Démontrer que l'on a : $\tan^2\frac{\pi}{12} + \tan^2\frac{5\pi}{12} = 14$

3°) Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{5\pi}{8}$

EXERCICE N°3

Soit ACDE un carré direct de côté a = 2 et soit ABC un triangle équilatéral indirect .

1°)Montrer que ABE est un triangle isocèle et calculer ses angles et en déduire que $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

2°)Soit H le projeté orthogonale de B sur [ED].

Calculer BH et en déduire le calcul exact de $\cos\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE N°4

Soit $\wp = \cos x \cos 2x \cos 4x$

1°)Montrer que : $8\sin x.\wp = \sin 8x$

2°)En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

EXERCICE N°5

Soit $\ell = 2\sin x(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$

1°)Montrer que : pour tout $a,b \in \mathbb{R}$: $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

2°)Montrer que $\ell = \sin 7x - \sin x$

3°)En déduire la valeur de $S = \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} + \sin^2\frac{6\pi}{7}$

EXERCICE N°6

1°)Montrer que pour tout x de R : $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$

2°)Montrer que pour tout x de R : $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

3°) Montrer que pour tout x de $R - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\right\}, k \in Z$: $\frac{\cos 2x}{\sin 2x - 1} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

4°) En déduire que pour tout x de $R - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\right\}, k \in Z$: $\frac{\cos 2x}{\sin 2x - 1} = \cot an\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE N°7

1°)Montrer que pour tout x de R : $\cos x+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=0$

2°)Calculer alors $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{11\pi}{7}+\cos\dfrac{17\pi}{7}=0$

3°) Montrer que : pour tout a,b∈ R : $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$

4°)En déduire que $\cos^2 x+\cos^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$

EXERCICE N°8

1°)Montrer que pour tous réels a et b différents de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in Z)$, *on a :* $\tan a+\tan b=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$

2°)Soit x un réel de $\left]-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right[$.

- *a) Montrer que :* $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4\sin 2x}{2\cos 2x-1}$
- *b) Montrer que :* $\cos x.(2\cos 2x-1)=\cos 3x$
- *c) En déduire que* $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\tan x+\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=3\tan 3x$

EXERCICE N°9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer le cordonnées polaire des points $A(1,\sqrt{3})$, $B(1,-\sqrt{3})$, $C(-1,\sqrt{3})$ *et* $D(-1,-\sqrt{3})$

EXERCICE N°10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère le carré OABC de centre S tel que les cordonnées cartésiennes respectives de A et C sont $(1,\sqrt{3})$ *et* $(-\sqrt{3},1)$.

1°)Faire une figure.

2°)Déterminer les cordonnées polaires de chacun des points A , C , B et S .

3°)En déduire le valeur de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\cos\dfrac{\pi}{12}$

EXERCICE N°11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points A(2,0) , B($\sqrt{3}$*,1) et le point C vérifiant* $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

1°)Déterminer les cordonnées polaires du point B.

2°)Placer les points A , B et C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

3°)a-Donner la nature du quadrilatère OACB.

b-Déterminer les cordonnées cartésiennes et les cordonnées polaires de C.

c-En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

4°)Construire chacun des ensembles suivants :

$$E=\left\{M(r,\theta)/\quad \theta=\frac{\pi}{6}\quad et\quad r\in[1,3]\right\}\quad et\quad F=\left\{M(r,\theta)/\quad \theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right[\quad et\quad r=2\right\}$$

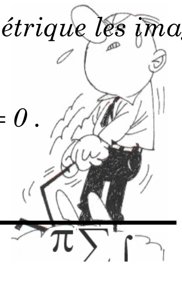
EXERCICE N°12

Partie I.

Résoudre les équations suivants dans R puis dans $[0,2\pi]$ *et représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions :*

$2\sin x=\sqrt{3}$; $2\cos x=-1$, $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$, $\sin x=\cos x$, $\tan x=-\sqrt{3}$, $\cos x-\sin^2 x-1=0$.

Partie II.



Résoudre les inéquations suivants dans $[0,2\pi]$

$\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2\cos x + 1 \ge 0$, $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le -1$, $\tan x > -\sqrt{3}$.

EXERCICE N°13

1°) *Résoudre dans R :* $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

2°)*Résoudre dans R :* $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$

3°) *Résoudre dans* $[-\pi,\pi]$: $\sin x - \sqrt{3}\cos x \ge \sqrt{2}$

4°) *Résoudre dans* $[-\pi,\pi]$: $3\cos x - 2\sin^2 x + 3 = 0$

5°) *Résoudre dans* $[-\pi,\pi]$: $3\cos x - 2\sin^2 x + 3 \ge 0$

6°)*Résoudre dans* $[0,2\pi]$: $\frac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x} \le 0$

EXERCICE N°14

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 4\sin^2 x - 1$ *et* $v(x) = 3\sin x - 4\sin^3 x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

1°)*Transformer u(x) en* $[c - r\cos(2x + \varphi)]$ *où c , r et* φ *sont des réels avec r* >0 *et* $0 < \varphi < \pi$.

2°)*Resoudre dans* $[0,\pi]$ *l'équation :* $u(x) = 1$.

3°)*Montrer que, pour tout réel x, on a :* $u(x) = 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

4°)*Montrer que, pour tout réel x , on a :* $v(x) = \sin 3x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

5°) *Montrer que, pour tout réel x , on a :* $v(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

6°)*Soit la fonction* $f : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$

a) *Déterminer le domaine de définition D de f .*

b)*Montrer que pour tout x de D :* $f(x) = \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

c)*Résoudre dans* $[0,\pi]$, *l'inéquation :* $f(x) \le \frac{2}{\sqrt{3}}$