Séries d'exercices *3ème technique*

PRODUIT SCALAIRE (PLAN)

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR

Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

EXERCICE N°1

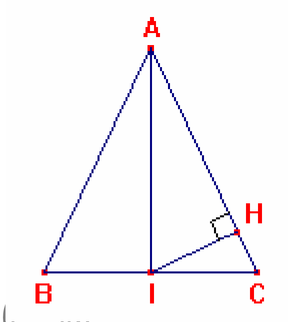
ABCD est un carré de côté a et m est un réel de l'intervalle] 0 ; 1 [.

Les points A', B', C' et D' sont tels que $\overrightarrow{DA'} = m\ \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB'} = m\ \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC'} = m\ \overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CD'} = m\ \overrightarrow{CD}$.

Démontrer que le quadrilatère A'B'C'D' est un carré.

EXERCICE N°2

Soit ABC un triangle isocèle en A. On note I le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).



1°) Démontrer que : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CH}$

2°) Calculer : $\overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

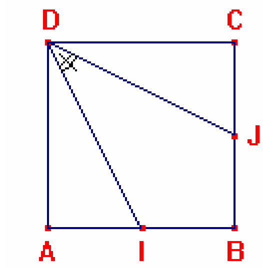
En déduire que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}$

3°) A l'aide des résultats précédents, démontrer que $\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{BH} = 0$

En déduire que si on note J le milieu de [IH], alors (AJ) est orthogonale à (BH).

EXERCICE N°3

Soit un carré ABCD de côté a, on note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].



1°) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ *et* $\overrightarrow{DJ}$ *en fonction des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$.

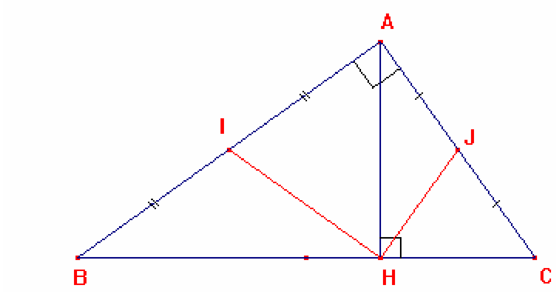
En déduire la valeur de $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DJ}$ *en fonction de a.*

2°) Calculer les longueurs DI et DJ en fonction de a.

3°) Déduire des résultats précédents la valeur exacte de cos(IDJ)

EXERCICE N°4

ABC est un triangle rectangle en A, le point H est le pied de la hauteur issue de A, le point I est le milieu de [AB], le point J est le milieu de [AC].



Prouver que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires .

EXERCICE N°5

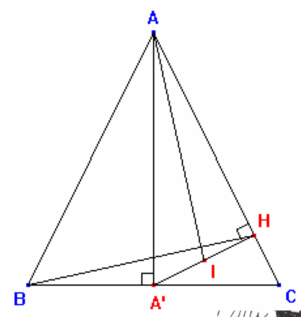
Soit ABC un triangle isocèle de sommet A. On note A' le milieu de [BC], H le projeté de A' sur (AC) et et I le milieu de [A'H].

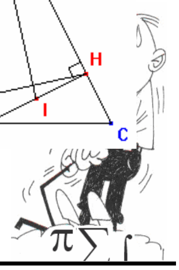
1°) Démontrer que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH}$

2°) Démontrer que $\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{A'C}$

3°) Démontrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{BC}$

4°) Déduire des résultats précédents que (AI) et (BH) sont orthogonales.





EXERCICE N°6

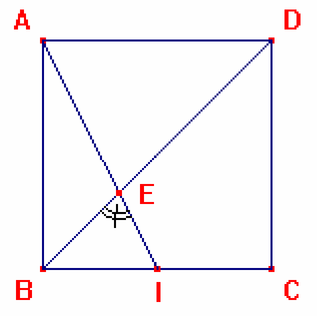
ABCD est un carré de centre O, M est un point du segment [AB]. La perpendiculaire menée de A à la droite (DM) coupe [BC] en P.

1°)Montrer que AM = BP et que les droites (OM) et (OP) sont perpendiculaires.

2°)Montrer que, lorsque M décrit la droite (AB), le milieu I de [MP] reste sur la médiatrice de [OB].

EXERCICE N°7

Soit ABCD un carré de côté a. On note I le milieu de [BC] et E le point d'intersection des droites (AI) et (BD).



1°) a) Calculer en fonction de a : AI et DB.

b) Calculer en fonction de a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}$*,*

et en déduire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DB}$

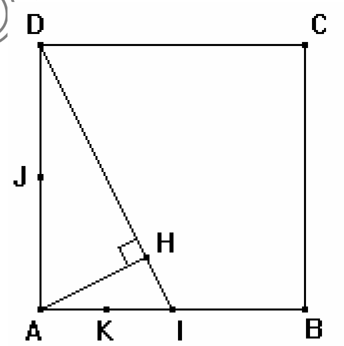
2°) En déduire une valeur à 0,1° près de l'angle BEI

EXERCICE N°8

Soit ABCD un carré de côté a. On note I, J et K les milieux des segments [AB], [AD] et [AI], puis H le projeté orthogonal de A sur la droite (DI).

On se propose de démontrer, de deux façons différentes, que (JH) et (HK) sont perpendiculaires.

1°) ***1ère méthode****.*



a) *Montrer que :* $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HI}=2\overrightarrow{HK}$ *et que* $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HJ}$.

b) *En déduire que* $4\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{HJ}=HA^2+\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HD}$.

c) *Démontrer que* $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD}=AH^2+\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HD}$

d) *En déduire que (JH) et (HK) sont perpendiculaires.*

2°) ***2ème méthode.***

On considère le repère (A ; $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ *).*

a) *Déterminer une équation de la droite (DI) et de la droite (AH).*

b) *En déduire les coordonnées du point H.*

c) *Vérifier que (JH) et (HK) sont perpendiculaires.*

EXERCICE N°9

Dans un plan P on considère un rectangle ABCD tel que AB=2BC=2.

Soit J le point du segment [CD] tel que $CJ=\frac{1}{2}$*. (BJ) coupe (AC) en I et coupe (AD) en K*

Partie I.

1°)a)Faire une figure illustrant les données ci-dessus

b)Vérifier que $AC=\sqrt{5}$*.*

2°)Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ *et* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CJ}$

3°)En déduire que (BJ) $\perp$ *(AC).*

4°a)Calculer la distance BJ .

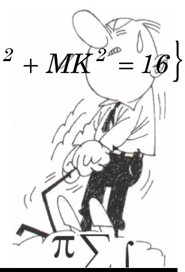
b)Démontrer que $BI=\frac{2}{\sqrt{5}}$*.*

c)Calculer alors le produit scalaire : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ}$

5°)Démontrer que : $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=4$*.*

Partie II.

On considère les ensembles suivants :E=$\left\{M, M\in P et MA^2+MB^2=6\right\}$ *et F=*$\left\{M, M\in P et 3.MA^2+MK^2=16\right\}$



1°)a)Vérifier que C∈ E.

b)Déterminer alors l'ensemble E et le construire.

2°)a)Vérifier que A∈ F.

b)Déterminer alors l'ensemble F et le construire.

EXERCICE N°10

ABCD est un rectangle de largeur AD = a et de longueur $AB = a\sqrt{2}$.
E est le milieu de [AB].
Que peut-on dire des droites (AC) et (DE) ?

EXERCICE N°11

Les points I et J sont les milieux des côtés [BC] et [CD] d'un carré ABCD (où AB = a, a > 0). On note θ *l'angle* $\widehat{IAJ}$ *. Donner une valeur exacte de* $\cos\theta$ *à 0,01 prés.*

EXERCICE N°12

On donne dans le plan (P) un triangle ABC tel que BC = 8 , AB = 6 et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$ *(rad).*

Soit f l'application du plan (P) dans R définie par : $f(M) = \vec{BC}.\vec{AM}$.
On désigne par ζ_a *l'ensemble des points M du plan tel que f(M) = a . où a est un réel.*
1°)Déterminer ζ_0 .
2°)Calculer f(B) et f(C).
3°)Déterminer le réel a tel que ζ_a *soit la médiatrice de [BC].*

EXERCICE N°13

On considère, dans le plan (P) , un triangle AOB rectangle en O. On note M un point quelconque de (P).
1°)Montrer que : $MA^2 + MB^2 - 2MO^2 = AB^2 + 4\,\vec{MO}.\vec{OI}$ *où I est le milieu de [AB].*
2°)Déterminer l'ensemble Δ *, des points M de (P) tels que l'on ait :*$MA^2 + MB^2 - 2\,MO^2 = \frac{AB^2}{2}$.

EXERCICE N°14

On donne, dans un plan (P), un triangle ABC rectangle en A et isocèle et on a : AB = AC = 5.
1°)Déterminer le barycentre G du système (A,-1) , (B,1) , (C,1).
2°) Montrer que : $MB^2 + MC^2 - MA^2 = MG^2$
3°)Déterminer l'ensemble Γ *des points M du plan (P) tels que* $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 25$.
4°)Déterminer l'ensemble (Δ *) des points N du plan (P) tels que :* $\left\|\vec{NA} + \vec{NC} - \vec{NA}\right\| = NO$ *où O est le milieu de [BC].*

EXERCICE N°15

Soit un triangle ABC.
1°)Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\vec{AB}.\vec{AM} = \vec{AC}.\vec{AM}$
2°) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $\vec{AB}.\vec{AM} = -\vec{AC}.\vec{AM}$