Séries d'exercices ***3ème info***

DERIVABILITES

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2}{x} & si \quad x>2 \\ f(x)=\dfrac{x}{2} & si \quad x \le 2 \end{cases}$

Etudier la dérivabilité de f en 2 et indiquer les conséquences graphiques des résultats obtenus.

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ *par* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} & si\ x>1 \\ f(1)=m \end{cases}$.

1°)Quelle valeur faut-il donner à m pour que f soit continue en 1.

2°) Etudier alors la dérivabilité de f en 1.

3°) Que peut-on dire de la courbe C_f *au point d'abscisse 1 ?*

EXERCICE N°3

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=(x+1)^2 & si \quad x \le -1 \\ f(x)=(x+1)\sqrt{x+1} & si \quad -1<x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{2x+2}{x+2} & si \quad x>0 \end{cases}$

1°)Etudier la continuité de f en -1 et 0.

2°)Montrer que f est dérivable en a =-1 et interpréter graphiquement le résultat.

3°)Vérifier que pour tout $x \in]-1,0[$ *: on a :* $\dfrac{f(x)-1}{x}=\sqrt{x+1}+\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

4°)Etudier la dérivabilité de f en 0. Ecrire une équation de la tangente ou des demi tangentes éventuelles au point A d'abscisse 0 et les construire.

5°)On considère la fonction g définie sur R_+^* *par :* $g(x)=\dfrac{2x+2}{x+2}$

- *a- Montrer que g est dérivable en tout point a de* $]0,+\infty[$ *et calculer* $g'(a)$
- *b- Montrer que* (ζg) *admet une tangente parallèle à la droite* $\Delta : x-3y+1=0$

EXERCICE N°4

Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ *;où a , b et c sont des réels et* $a \ne 0$ *.*

On désigne par (ζf) *la courbe représentative de f dans un repère du plan.*

1°)Montrer que f est dérivable en tout point x_0 *de R et calculer* $f'(x_0)$ *.*

2°)Déterminer les réels a , b et c pour les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- (ζf) *admet en sont point d'abscisse 2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.*
- (ζf) *admet en son point d'abscisse 1 pour tangente la droite* $\Delta : 2x+y-4=0$

EXERCICE N°5

Soient les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$, $h : x \mapsto (1+x)^2$, $k : x \mapsto (1+x)^3$,

$m : x \mapsto (1+x)^n$ $(n \in N^*)$

1°)Justifier que chacune des ces fonctions sont dérivables en 0 et calculer $f'(0)$ et $g'(0)$

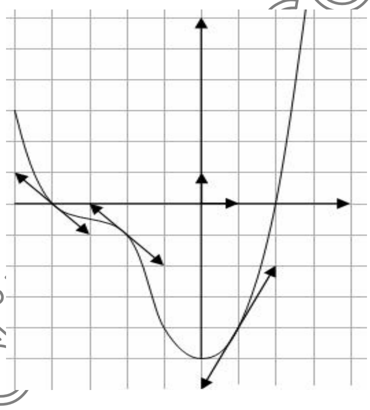
2°)Déterminer les approximations affine de f et g au voisinage de 0.

3°)Calculer alors $\sqrt{1,0002}$, $\sqrt{0,995}$, $\dfrac{1}{0,996}$, $\dfrac{1}{1,0008}$, 0.97^2 , 0.97^3 , 0.97^{2008}

EXERCICE N°6

Soit (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

(Voir figure)



1°)Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

a) $f'(-4) < 0$

b) $f'(1) < 0$

2°)Par un lecture graphique , Calculer : $f'(-4)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(1)$

3°)Soient T_{-4} , T_{-2} et T_1 les tangentes à (ζf) respectives aux points d'abscisses -4 , -2 et 1.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) T_{-4} est parallèle à T_{-2}

b) T_{-4} est perpendiculaire à T_1

4°)Résoudre dans R l'équation f '(x)< 0

5°)Soit la fonction g définie sur R d'axe se symétrie la droite d'équation x = 1 et on a pour tout $x \geq 1$: g(x) = f(x). Etudier la dérivabilité de g en 1 .

6°)Sachant que pour tout $x \geq 1$, il existe des réels a , b et c tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$

Etablir que : $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 & si \quad x \geq 1 \\ 2x^2 - 6x & si \quad x \leq 1 \end{cases}$

7°)Calculer $g'(x_0)$ pour tout $x_0 \in]1,+\infty[$ et $x_0 \in]-\infty,1[$

EXERCICE N°7

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2 - 2|x-1|$

1°)Ecrire f sans valeur absolue.

2°)Etudier la dérivabilité de f en 1.

3°)Dresser le tableau de variations de f et préciser la nature de chacun extrema.

EXERCICE N°8

Soit la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 3x + a}{x-2}$ où a est un paramètre réel. On note (ζ_a) la courbe représentative de f_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé R=$(O,\vec{i},\vec{j})$

1°)Calculer $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (f(x) - 2x - 1)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) Dresser le tableau de variations de f_0 .

3°) Pour quelles valeurs de a , la fonction f_a admet un maximum et un minimum ?

4°)Exprimer en fonction de a les cordonnées des deux points correspondants de (ζ_a) et déterminer l'ensemble de ces points quand m varie.

4°)Soit K le point où (ζ_a) coupe l'axe des ordonnées. Ecrire l'équation de la tangente en K à la courbe (ζ_a)et montrer que cette tangente coupe l'asymptote oblique de (ζ_a) en un point fixe T dont on donnera les cordonnées.

EXERCICE N°9

Première partie

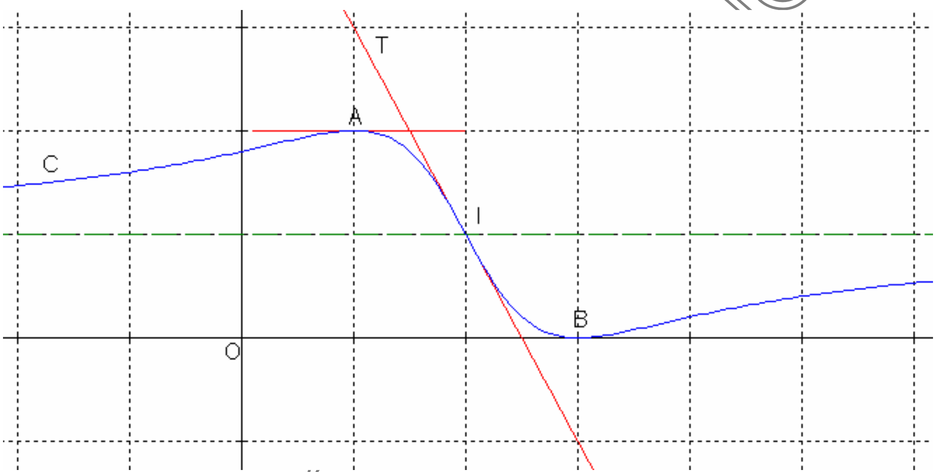
Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4x+5}$ *définie sur R.*

Calculer les réels a et b de sorte que la courbe (C) représentative de f passe par le point I(2,1) et admette au point I une tangente parallèle à la droite d'équation y = - 2 x.

Deuxième partie

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x^2-4x+5}$ *définie sur R*

Le graphique ci-dessous donne la courbe (C) représentative de f , ainsi que les tracés de l'asymptote et d'une tangente (T) (unités : 2 cm).



1°)Etudier les limites de f aux bornes du domaine.

2°)Etudier les variations de f.

3°)Quelle est l'équation de la tangente à (C) au point I ?

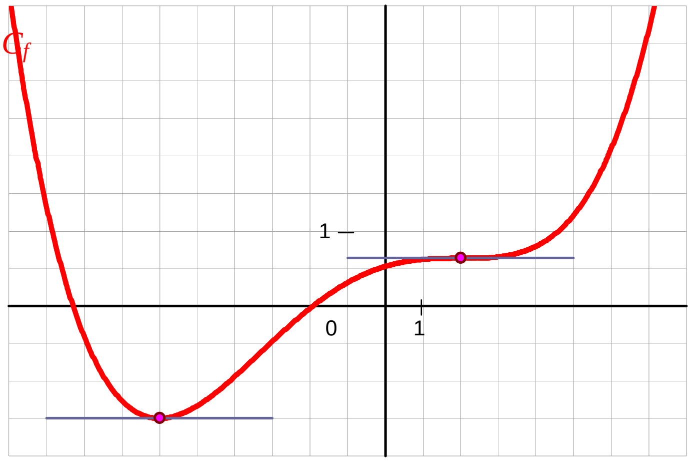
EXERCICE N°10

La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur R dans un repère du plan.

On note f' la fonction dérivée de f.

La courbe (C_f) vérifie les propriétés suivantes :

- *Les tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisse − 3 et 1 sont parallèles à l'axe des abscisses ;*
- *la tangente à la courbe (C_f) au point de coordonnées $\left(3,\dfrac{21}{10}\right)$ passe par le point de coordonnées $\left(4,\dfrac{45}{10}\right)$.*

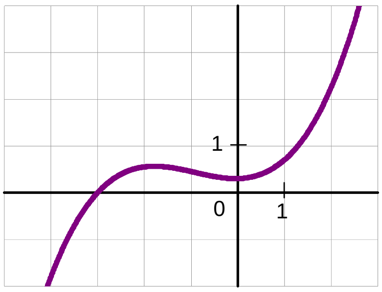


1°)Donner les valeurs de *f '(-3) , f '(1) et f '(3)* .

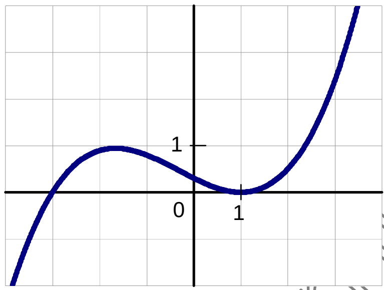
2°)Résoudre dans R l'inéquation : *f '(x) > 0*

3°)Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une seule représente la fonction dérivée *f '* de *f* sur R.

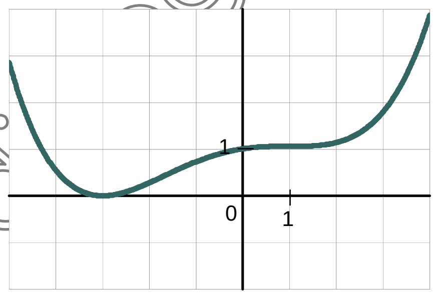
Déterminer la courbe associée à la fonction *f '*. Vous expliquerez les raisons de votre choix.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

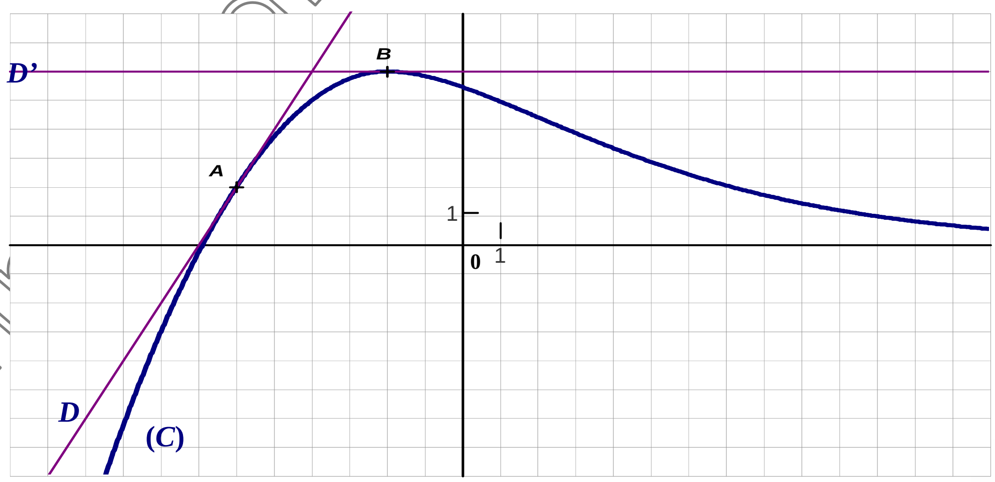
EXERCICE N°13

Soit une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La courbe (C) donnée ci-après représente la fonction *f* dans un repère orthonormal du plan.

Cette courbe passe par les points $A(-3\ ;\ 1)$ et $B(-1\ ;\ 3)$.

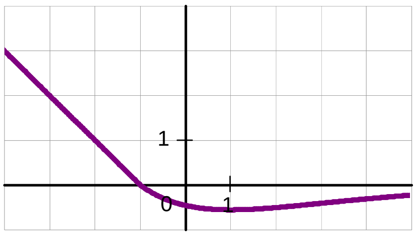
Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B et sont sécantes au point d'abscisse -2.



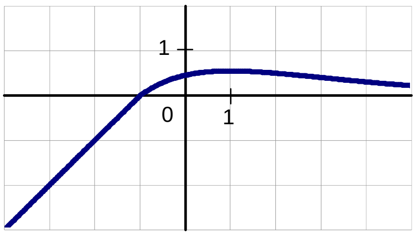
1°)Déterminer graphiquement $f\,'(-3)$ et $f\,'(-1)$.

2°)Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une seule représente la fonction dérivée *f '* de *f* sur R.

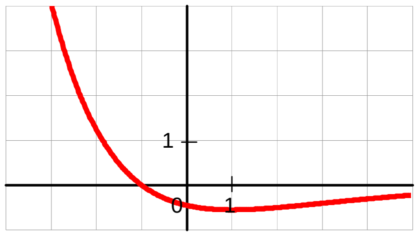
Déterminer la courbe associée à la fonction *f '*. Vous expliquerez les raisons de votre choix.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

3°)Soit g la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{31}{10},+\infty\right[$ *par* $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

a) *Donner les variations de la fonction g.*

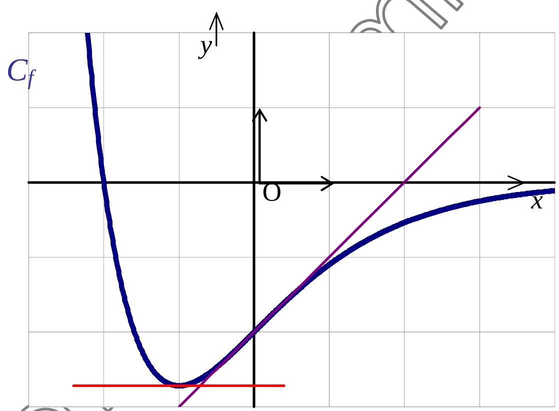
b) *Calculer* $g'(-3)$.

EXERCICE N°14

La courbe (C_f) *ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur R dans le repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$. *On note f ' la fonction dérivée de f.*

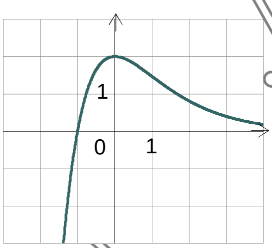
La courbe (C_f) *vérifie les propriétés suivantes :*

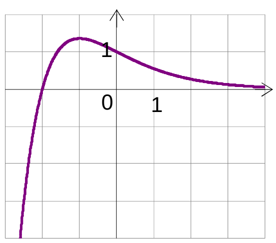
- *Les points de coordonnées respectives (-2,0) et (0,-2) appartiennent à la courbe tracée ;*
- *la tangente à la courbe* (C_f) *au point d'abscisse* -1 *est parallèle à l'axe des abscisses ;*
- *la tangente à la courbe* (C_f) *au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en x = 2.*

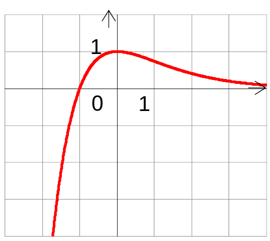


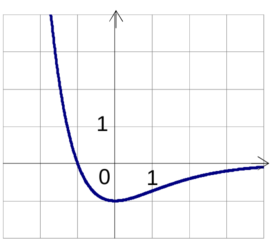
1°)Donner les valeurs de $f(0)$, $f'(-1)$ *,et* $f'(0)$.

2°)Parmi les quatre représentations graphiques ci-dessous, une seule représente la fonction dérivée f ' de f sur R. Vous expliquerez les raisons de votre choix.









☐ *Figure 1* ☐ *Figure 2* ☐ *Figure 3* ☐ *Figure 4*

Déterminer la courbe associée à la fonction f '. Vous expliquerez les raisons de votre choix.