Série fonctions trigonométriques

Mr Masmoudi Radhouane

Exercice 1 :

Calculer les limites éventuelles suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan 3x)^2}{1-\cos x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x - x}{\sin x}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$ (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)$

(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-1}{\cos 2x}$ (7) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ (8) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\tan^2 x$

(9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{1-\cos x}$ (10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}$.

Exercice 2 :

Soit $f(x)=\cos^2 3x-\sin^2 x$ et $g(x)=2\cos x-2\cos^3 x$.

1) Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$et $g'(x)$.
2) Calculer $g(\pi-x)$. Que peut-on conclure.
3) Montrer qu'on peut étudier g sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
4) Calculer $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{f(x)+g(x)-1}{\pi-3x}$.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}$, si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Etudier la parité de f.
3) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sin 2x - 2\cos x$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm).

1) Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$ puis montrer qu'on peut étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Etudier f et représenter la partie de $\mathscr{C}_0$ de $\mathscr{C}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{2\cos^3 x}{1+\sin x}, & \text{si } x \in \left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$.

   a) Montrer que g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

   b) Etudier la dérivabilité de g.

   c) Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ $g(x) = -f(x)$ puis construire $\mathscr{C}_g$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que le point $A(\frac{\pi}{2},0)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

2) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et que :
$f'(x) = \dfrac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2(2x)}$.

3) Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cap D_f$.

4) Etudier f et tracer la partie de $\mathscr{C}$ dans $[-\pi,\pi]$.

5) Déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'ordonnées 1.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x$.

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la droite $\Delta_k : x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ puis montrer qu'il suffit d'étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

3) Etudier f et tracer la partie de $\mathscr{C}_f$ dans $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

4) Soit $g(x) = \frac{f(x) - 1}{\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x}$, $x \in \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$. Préciser D_g puis étudier g et tracer sa courbe $\mathscr{C}_g$ dans un nouveau repère orthonormé.