Série d'exercices **Hichem Khazri**
Limites **3° M**

Limites - Continuité - Asymptotes

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{5x-7}{x^2-2}$

1- Déterminer $\lim\limits_{(\sqrt{2})^-} f(x)$ et $\lim\limits_{(\sqrt{2})^+} f(x)$

2- La fonction f admet-elle une limite en $\sqrt{2}$

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x}{(x-2)^2-4}$

1- Déterminer Df puis simplifier f(x)

2- Déterminer $\lim\limits_{0} f(x)$, $\lim\limits_{4^-} f(x)$, $\lim\limits_{4^+} f(x)$

3- f admet-elle une limite en 4 .

EXERCICE N°3

Soit la fonction f définie par $f(x)=3x^2-5x+2$

1- Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f(x)$

2- a) Factoriser f(x) .

b) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{-\infty} 1/f(x)$

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x-5}{x+2}$ 1- Ecrire f(x) sous la forme : $f(x)= a+\frac{b}{x+2}$, a et b étant deux réels que l'on déterminera .

2- Déterminer Lim f(x) et Lim f(x)

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie par f(x)= $\dfrac{x^2-2x-3}{|x+1|}$

1- Simplifier f(x) sur] -∞ ,-1[puis sur]-1, +∞ [

2- Calculer $\lim\limits_{(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{(-1)^-} f(x)$; que peut-on conclure ?

3- Calculer $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x)$

EXERCICE N°6

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

1) $\lim\limits_{-\frac{1}{2}} \dfrac{6x^3+5x^2-x-1}{2x^2+9x+4}$ 2) $\lim\limits_{0} \dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$ 3) $\lim\limits_{1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ 4) $\lim\limits_{2} \dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x^3-3x^2+4}}$

5) $\lim\limits_{1} \dfrac{\sqrt{x^3-4x^2+5x-2}}{x^2-6x+5}$ 6) $\lim\limits_{\frac{3}{2}} \dfrac{4x^2-9}{27-8x^3}$ 7) $\lim\limits_{2} \dfrac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$ 8) $\lim\limits_{1} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^3}$

9) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{|4+x|-2}}{x}$ 10) $\lim\limits_{2} \dfrac{x^2-4}{(x-2)^2(x+5)}$ 11) $\lim\limits_{-2} \dfrac{x^3+x^2-8x-12}{x^2-4x-12}$ 12) $\lim\limits_{1} \dfrac{2x^2-7x+5}{x-1}$

EXERCICE N°7

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

1) $\lim\limits_{1} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{1-\sqrt{x}}$ 2) $\lim\limits_{0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ 3) $\lim\limits_{0^+} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{x+\sqrt{x}}$ 4) $\lim\limits_{7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x-3}-2}$ 5) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}x-1}{x^2}$

6) $\lim\limits_{5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$ 7) $\lim\limits_{2} \dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$ 8) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ 9) $\lim\limits_{1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

10) $\lim\limits_{2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ 11) $\lim\limits_{4} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}{x^2-16}$ 12) $\lim\limits_{-2} \dfrac{x+2}{x+\sqrt{x+6}}$ 13) $\lim\limits_{2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$

EXERCICE N°8

Déterminer les limites des fonctions suivantes lorsque |x| tend vers +∞

1) $2x^2+5x+3$ 2) $3x^3-\frac{1}{2}x^2+x-3$ 3) $\frac{3}{2}x^4-x+2$ 4) $-x^3+\frac{1}{3}x^3-\sqrt{3}-2x^4$

5) $\frac{2x+1}{3x-5}$ 6) $\frac{-x+6}{3x-4}$ 7) $\frac{x}{2x^2+1}$ 8) $\frac{-5x^2+2x+1}{3x-5}$ 9) $\frac{4x^3-1}{3x^4+2x-7}$

10) $\frac{\frac{1}{2}x^3-2x^2+\sqrt{2}}{-3x^3+x-1}$ 11) $\frac{4x^3+2x-1}{(x^2-1)(3x^2+2)}$ 12) $\frac{x^2-3x+4}{(x+2)^2(x+3)}$

EXERCICE N°9

Déterminer les limites des fonctions suivantes lorsque |x| tend vers +∞

1) $\frac{\sqrt{x^3}}{x-1}$ 2) $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ 3) $\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x$ 4) $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x$ 5) $\frac{x^2}{x-1}$

6) $\frac{x^2}{x(x-1)}$ 7) $\frac{x^2}{x-1}-x$ 8) $5x+3\sqrt{x^2-1}$ 9) $\frac{5x+3\sqrt{x^2-1}}{x}$ 10) $3x+3\sqrt{x^2-1}$

11) $x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 12) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 13) $x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x$ 14) $\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$

15) $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$ 16) $\sqrt{x^2+5}+mx-2$ (discuter suivant m) 17) $\sqrt{x^2+2x+2}+x$

18) $\frac{x^2+3x+1}{x-1}-ax$ (discuter selon a) 19) $\frac{x^2+3x+1}{x-1}-ax+b$ (discuter selon a et b)

20) $\sqrt{x^4+x^2+2}-(x^2+x+1)$ 21) $\sqrt{2x^2-x+1}+(x+2)$ 22) $\sqrt{4x^2-3x+5}-(2x+1)$

23) $\sqrt{x^3+x+1}-(x+1)$ 24) $\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^2+1}$ 25) $\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$ 26) $\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+x-3}}$

27) $\frac{2x-1-\sqrt{4x^2+2x-5}}{x-3+\sqrt{3x^2-x+2}}$ 28) $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2}$ 29) $\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+2}$ 30) $\sqrt{x^2+x-1}-3x+2$

EXERCICE N°10

Soit la fonction définie par : f(x)= $\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

Déterminer $\lim\limits_{1} f(x)$, $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x)$

<u>EXERCICE N° 11</u>

Soit la fonction f définie par f(x)= $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12}$

Déterminer Lim f(x) , Lim f(x) et Lim f(x)

3 +∞ - ∞

<u>EXERCICE N°12</u>

Soit la fonction f définie par : f(x)= $\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$

Déterminer Lim f(x) et Lim f(x)

3 +∞

<u>EXERCICE N°13</u>

Soit la fonction f définie par : f(x)= $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x}$

Déterminer Lim f(x) ; Lim f(x) et Lim f(x)

0 +∞ - ∞

<u>EXERCICE N°14</u>

Soit la fonction f définie par : f(x)= $\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{x-3}$

Déterminer Lim f(x) et Lim f(x)

3 +∞

<u>EXERCICE N°15</u>

Soit la fonction f définie par f(x)= $\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}$ Déterminer Lim f(x)

+∞

<u>EXERCICE N°16</u>

Soit la fonction f définie par : f(x)= $\dfrac{x-1-\sqrt{x+1}}{x(x-3)}$

Déterminer $\lim\limits_{3} f(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

EXERCICE N°17

Soit la fonction f définie par f(x)= $\dfrac{\sqrt{5x+1}-x-1}{\sqrt{x+4}-2}$

Déterminer le domaine de définition de f et $\lim\limits_{0} f(x)$

EXERCICE N°18

Soit la fonction f définie par f(x)= $\dfrac{mx+2m-6}{x-1}$

1- Etudier suivant les valeurs de m la limite de f au point $x_0 = 1$

2- Etudier suivant les valeurs de m la limite de f en +∞ et en -∞

EXERCICE N°19

Soit la fonction f définie par f(x)= $\dfrac{\sqrt{x^2+9}-m}{x-4}$

Déterminer suivant les valeurs de m la limite de f lorsque x tend vers 4.

EXERCICE N°20

Soit la fonction f définie par f(x)= $\dfrac{x^2+(m-1)x-2(m+1)}{x^2-5x+6}$

1- Déterminer l e domaine de définition de f .

2- Déterminer $\lim\limits_{1} f(x)$ et $\lim\limits_{2} f(x)$

EXERCICE N°21:

Calculer la limite de f en x_0

$f(x)=\left|\dfrac{1-2x}{x^2-3}\right| en -1$

$f(x)=\dfrac{|x^2+x|+2}{|x|-25} en 9$

$f(x)=\dfrac{x^2-9}{2x^2+6x} en -3$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} en 2$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+125}{x+5}} en -5$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} en 2$

$f(x)=\dfrac{\dfrac{x+1}{x-4}+4}{x-3} en 3$

$f(x)=\left|\dfrac{(x+1)^3-1}{x}\right| en 0$

EXERCICE N°22:

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

1) calculer la limite de f en2
2) la fonction f est elle prolongeable par continuité en 2 . si oui définir ce prolongement

EXERCICE N°23

On considère la fonction f définie sur IR

par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2-16x+48}{x^2-16} & \text{si } x \neq 4 \text{ et } x \neq -4 \\ a & \text{si } x=4 \\ b & \text{si } x=-4\end{cases}$

1) Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 4
2) Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en -4

EXERCICE N°24:

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x+2} & \text{si } x<-1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+3} & \text{si } x \geq -1\end{cases}$ et Cf sa courbe représentative

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Calculer $\lim\limits_{(-2^-)} f$ et $\lim\limits_{(-2^+)} f$. Interpréter graphiquement
3) Etudier la continuité de f en -1
4) a) Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$
   b) Montrer que $\forall x \in]-\infty,-1[\; : f(x) = 2x-3+\dfrac{7}{x+2}$
   c) Montrer que la droite $\Delta : y = 2x-3$ est une asymptote oblique à Cf au voi de $-\infty$
   d) Etudier la position relative de Cf et Δ
5) a) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$
   b) Montrer que $\forall x \in IR \; : \sqrt{x^2+3}-x = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$
   c) En déduire que la droite $\Delta' : y = x$ est une asymptote oblique à Cf au voi de $+\infty$

EXERCICE N°25

Soit la fonction f définie sur IR\{2} par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}+\dfrac{23}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
2) f admet elle une limite en 2
3) f est elle prolongeable par continuité en 2 si oui donner se prolongement

EXERCICE N°26:

Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) Montrer que f est continue sur $]1;+\infty[$
2) Soit a et b deux réels de l'intervalle $]1;+\infty[$ tels que $a \le b$
   a) Calculer $f(a)-f(b)$
   (0.25)
   b) En déduire les variations de f sur $]1;+\infty[$
3) a) Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[\, , \left(f(x)=0 \right) \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x \right)$
   b) Déterminer $f( ]1,1;2[ )$
   c) En déduire Que l'équation $1+\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x$ admet une solution $\alpha \in]1,1;2[$
4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 121} f(x)$
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$
   c) En déduire $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

EXERCICE N°27

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

EXERCICE N°28

Soit la fonction $f(x)=x^3-x^2-x-1$

1) Montrer que f est continue sur IR
2) Calculer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$
3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans l'intervalle $[1;2]$
4) Montrer que $\alpha=\dfrac{1}{\alpha^2-\alpha-1}$

EXERCICE N°29

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+x-1} & \text{si } x<-1 \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{x+4} & \text{si } -1\leq x\leq 1 \\ f(x)=ax-\sqrt{x^2+3} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1) a) Montrer que si $x<-1$ $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$

   b) Calculer : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ f est elle continue en -1.

2) Déterminer a pour que f soit continue en 1
3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Dans la suite en prend $a=1$.

4) a) Montrer que pour $x>1$ $f(x)=\dfrac{-3}{x+\sqrt{x^2+3}}$

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5) En déduire d'après ce qui précède les asymptotes à la courbe représentative de f

EXERCICE N°30

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x^2-4}{2x^2+x-6}$ $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{|x-3|}$; $\lim\limits_{x\to 5-}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{x^3-125}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{|x|}x}$; $\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{|x|(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}$

EXERCICE N°31

Soit la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-5x-14} & \text{si } 1<x<2 \\ f(x)=x-\dfrac{11}{5} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

1) déterminer le domaine de définition de f
2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to1+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1-} f(x)$

   b) f admet elle une limite en 1 ?

   c) f est elle continue en 1 ?
3) Etudier la continuité de f en 2
4) *f* est elle continue sur son domaine de définition ?justifier
5) *f* est elle prolongeable par continuité en 2 ?

   Si oui donner se prolongement par continuité.

EXERCICE N°32

Soit la fonction *f* définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2} & \text{si } x\neq-1 \text{ et } x\neq 2\\ f(x)=a & \text{si } x=-1\\ f(x)=b & \text{si } x=2\end{cases}$

1) Déterminer les valeurs de a et b pour que *f* soit continue respectivement en -1 et en 2
2) En déduire le domaine de continuité de *f*

EXERCICE N°33

Soit la fonction *f* définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x>1\\ f(x)=a(x-1)^2-\dfrac{1}{4}(x-1)+\dfrac{1}{2} & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ f(x)=x\sqrt{-x}+b & \text{si } x<0\end{cases}$

Avec a et b sont des réels.

1) Etudier la continuité de f en 1
2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit continue en 0
3) *f* est elle continue sur IR si a=0 et b = $\dfrac{3}{4}$

EXERCICE N°34

Soit la fonction *f* définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=x^3+x^2+b & \text{si } x<0\\ f(x)=\dfrac{x-2}{x+1} & \text{si } 0\leq x<2\\ f(x)=\sqrt{x^2+5}-x & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ En déduire b pour que *f* soit continue en 0
2) *f* est elle continue en 2
3) On prend b=-2 Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$
4) a) Montrer que pour $x\geq 2$ on a : $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}$

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement