Exercice N°1 : ©

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$(2x - 3)(x - 1)^2 - 4(2x - 3) < 0$; $(6x - 7)^2 - (2x - 3)^2 > 0$; $3(4-x)(2x-1)+2(3-x)(4x-16) \leq 0$.

$\frac{3x-5}{x-2} \leq \frac{x-2}{3x-5}$; $\frac{x}{x-1} < \frac{x+3}{x+1}$; $\frac{x^2-4}{x-1} \leq x+3$.

$\sqrt{3x-5} \leq \sqrt{x+1}$; $\sqrt{x^2+1} > x+2$.

Exercice N°2 : ©

On considère un rectangle dont le périmètre en mètres est $2 \cdot p$. Ses dimensions en mètres sont x et y. Si on augmente x de 5 m et y de 3m la surface augmente de 195 m².

1. Montrer que : $x = \frac{5}{2}p - 90$ et $y = 90 - \frac{3}{2}p$.
2. Pour quelles valeurs de p le problème est – il possible ?
3. Pour quelles valeurs de p le rectangle est un carré ?

Exercice N°3 : ©

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

- $4x^2 - 9x + 2 = 0$; $2x^2 - 3x + 7 = 0$; $3x^2 + x\sqrt{3} + \frac{1}{4} = 0$.
- $x^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$; $17x^2 - 20x + 3 = 0$; $61x^2 + 95x + 34 = 0$.
- $\sqrt{2x^2+1} = 3(x-1)$; $\left(2x^2 - 4x + 1\right)^2 = \left(x^2 + 2x - 2\right)^2$.
- $3x^2 - 2|x| - 1 = 0$; $2(x+3)^2 - 9(x+3) - 5 = 0$; $\left(x^2 + x + 1\right)^2 - 4\left(x^2 + x - 2\right) = 17$.

Exercice N°4 : ©

Soit l'équation $(E) : ax^2 - 5x - 14 = 0$ (a un réel non nul).
Déterminer a pour que le réel 2 soit racine de (E). Calculer l'autre racine de l'équation (E).

Exercice N°5 : ©

Soit l'équation $(E) : x^2 - 2x\sqrt{5} - 8 = 0$.

Sans calculer les racines x' et x'', calculer les expressions suivantes : $A = (2x'+1)(2x''+1)$ et $B = x'^2 + x''^2$.

Exercice N°6 :

On considère l'équation $(E): x^2+5x-14=0$.

1. Sans calculer le discriminant, dire pourquoi (E) admet deux racines distinctes.
2. Sans calculer les racines x' et x'' de (E), calculer chacune des expressions suivantes :
   $A=x'x''$; $B=(2x'-1)(2x''-1)$ et $C=x'^2+x''^2$.
3. Calculer x'', sachant que $x'=2$.
4. Trouver deux réels x et y vérifiant : $\begin{cases} x+y=-5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{14} \end{cases}$

Exercice N°7 :

Soit $A(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$

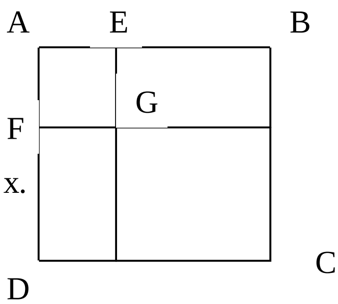
a) Résoudre dans IR, l'équation : $A(x)=0$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $\dfrac{A(x)}{x^2-3}=0$

Exercice N°8 :

1. Résoudre dans IR, l'équation : $2x^2-5x+3=0$.
2. Déterminer l'ensemble D des réels x pour les quels l'expression $A(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}$ soit définie.
3. On considère l'expression $A(x)=2x^3-9x^2+13x-6$.
   a) Vérifier que $A(x)=(x-2)(2x^2-5x+3)$.
   b) Résoudre dans IR, l'inéquation : $2x^3-9x^2+13x-6\geq 0$.
4. a) Résoudre dans IR, l'équation $x^2-5x+4=0$.
   b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $x^4-5x^2+4=0$
5. Simplifier l'expression : $B(x)=\dfrac{x^4-5x^2+4}{2x^3-9x^2+13x-6}$

Exercice N°9 :



Le carré ABCD mesure 10 cm de côté, nous choisissons un point E sur [AB] et nous dessinons les carrés AEGF et GHCI.

a) En posant AE = x, calculer S_1 aire du carré AEGF et S_2 aire de GHCI en fonction de x.

b) On pose S(x) la somme des aires S_1 et S_2. Montrer que $S(x)=2x^2-20x+100$.

c) Déterminer x, pour que S(x) soit égale à la moitié de l'aire du carré ABCD.

Exercice N°10 : ©

1. Parmi les rectangles de périmètre 40 m, déterminer celui qui a une aire maximale.
2. Une fenêtre formée d'un rectangle surmonté d'un triangle équilatéral a 5 cm de périmètre.

   a) Soit x la largeur du rectangle. Montrer que l'aire de la fenêtre est $S(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3}-6\right)x^2+10x}{4}$.

   b) Trouver les dimensions du triangle pour que S(x) soit maximale.

Exercice N°1 :

- **(2 x - 3)** (x - 1)^2 - 4 **(2 x - 3)** < 0 : c'est une inéquation produit

On factorise

$(2x-3)\left[(x-1)^2-4\right]<0 \Leftrightarrow (2x-3)(x-1-2)(x-1+2)<0$

$\Leftrightarrow (2x-3)(x-3)(x+1)<0$

Tableau de signes

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(2x-3)(x-3)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{IR} = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]\frac{3}{2},3\right[$

- $\dfrac{3x-5}{x-2} \leq \dfrac{x-2}{3x-5}$: c'est une inéquation fractionnaire

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-5}{x-2}-\dfrac{x-2}{3x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(3x-5)^2-(x-2)^2}{(x-2)(3x-5)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2x-3)(4x-7)}{(x-2)(3x-5)} \leq 0$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{4}$		2		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$4x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(2x-3)(4x-7)}{(x-2)(3x-5)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$$S_{IR} = \left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right[\cup \left[\frac{7}{4},2\right[$$

- $\sqrt{x^2+1} > x+2$

  Si $x \in]-\infty,-2]$ alors $x + 2 \leq 0$ et par suite $\sqrt{x^2+1} > x+2$ est toujours vrai donc $S_1 =]-\infty,-2]$

  Si $x \in [-2,+\infty[$ alors $x + 2 \geq 0$ et par suite

  $\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\geq 0} > \underbrace{x+2}_{\geq 0} \Leftrightarrow x^2+1 \geq (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2+1 \geq x^2+4x+4 \Leftrightarrow 4x \leq -3 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{4}$

  Donc $S_2 = \left]-\infty,-\frac{3}{4}\right] \cap [-2,+\infty[= \left[-2,-\frac{3}{4}\right]$

  $S_{IR} = S_1 \cup S_2 =]-\infty,-2] \cup \left[-2,-\frac{3}{4}\right] = \left]-\infty,-\frac{3}{4}\right]$

Exercice N°2 :

1. On sait que le périmètre du rectangle est 2p $\Rightarrow$ 2(x + y) = 2p $\Rightarrow$ x + y = p (*)
   (x + 5)(y + 3) = xy + 195 (**)
   (*) $\Rightarrow$ y = p – x.
   On remplace dans (**), on obtient :
   (x + 5)(p – x + 3) = x(p - x) + 195 $\Leftrightarrow$ px – x^2 + 3x + 5p – 5x + 15 = px – x^2 + 195
   $\Leftrightarrow$ - 2x = - 5p + 180 $\Leftrightarrow$ $x = \frac{5}{2}$p – 90
   D'où y = p – x = p - $\frac{5}{2}$p + 90 = - $\frac{3}{2}$p + 90
2. $x = \frac{5}{2}p - 90$ et $y = 90 - \frac{3}{2}p$.
   Puisque $x > 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}p - 90 > 0 \Rightarrow \frac{5}{2}p > 90 \Rightarrow p > 36$
   Et $y > 0 \Rightarrow y = 90 - \frac{3}{2}p > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}p < 90 \Rightarrow p < 60$
   D'où 36 < p < 60.
3. Pour que le rectangle soit un carré il faut et il suffiet que :
   x = y $\Leftrightarrow \frac{5}{2}p - 90 = 90 - \frac{3}{2}p \Leftrightarrow$ 4p = 180 $\Leftrightarrow$ p = 45.

Exercice N°3 :

- $4x^2 - 9x + 2 = 0$; $\Delta = (-9)^2 - 4\times4\times2 = 81 - 32 = 49 > 0$

  $x' = \frac{9-\sqrt{49}}{8} = \frac{1}{4}$ et $x'' = \frac{9+\sqrt{49}}{8} = 2$

  $2x^2 - 3x + 7 = 0$; $\Delta = (-3)^2 - 4\times2\times7 = 9 - 56 = -47 < 0 \Rightarrow$ l'équation n'a pas de solutions.

  $3x^2 + x\sqrt{3} + \frac{1}{4} = 0$; $\Delta = \sqrt{3}^2 - 4\times3\times\frac{1}{4} = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ l'équation admet une racine double

  $x' = x'' = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

- $x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}=0$; $\Delta=\underbrace{\left(2+\sqrt{3}\right)^2-4\times 2\sqrt{3}}_{(a+b)^2-4ab}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2>0$

  $x'=\dfrac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ et $x''=\dfrac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2}=2$

  $17x^2-20x+3=0$; 17 – 20 + 3 = 0 ⇒ l'équation admet deux racines évidentes $x'=1$ et $x''=\dfrac{3}{17}$

  $61x^2+95x+34=0$; 61 – 95 + 34 = 0 ⇒ l'équation admet deux racines évidentes $x'=-1$ et $x''=-\dfrac{34}{61}$

- $\sqrt{2x^2+1}=3\left(x-1\right)$: c'est une équation irrationnelle

  Condition : $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

  $\sqrt{2x^2+1}=3\left(x-1\right) \Leftrightarrow 2x^2+1=9(x^2-2x+1) \Leftrightarrow 7x^2-18x+8=0$

  $\Delta'=(-9)^2-7\times 8=81-56=25>0$

  $\Rightarrow x'=\dfrac{9-5}{7}=\dfrac{4}{7}$ et $x''=\dfrac{9+5}{7}=2$, or il faut que $x\geq 1 \Rightarrow x=2$.

- $3x^2-2\left|x\right|-1=0$: c'est une équation qui se ramène à une équation du second degré après un changement de variables

  On pose $t=|x|$, l'équation devient : $3t^2-2t-1=0$; 3 – 2 – 1 = 0 ⇒ $t=1$ ou $t=-\dfrac{1}{3}$

  $|x|=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

  $|x|=-\dfrac{1}{3}<0$ impossible

  $\left(x^2+x+1\right)^2-4\left(x^2+x-2\right)=17$

  On pose $t=x^2+x+1$, l'équation devient : $t^2-4(t-3)=17 \Leftrightarrow t^2-4t-5=0$; $1-(-4)-5=0$

  $\Rightarrow t=-1$ ou $t=5$

  $x^2+x+1=-1 \Leftrightarrow x^2+x+2=0$; $\Delta=1^2-4\times1\times2=-7<0 \Rightarrow$ pas de solutions

  $x^2+x+1=5 \Leftrightarrow x^2+x-4=0$; $\Delta=17>0 \Rightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ou $x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

Exercice N°4 :

$(E): ax^2-5x-14=0$

2 est une racine de (E) $\Leftrightarrow 4a-10-14=0 \Leftrightarrow a=6$

Si 2 est une racine alors $x'x''=2x''=-\dfrac{14}{a}=-\dfrac{14}{6}=-\dfrac{7}{3} \Leftrightarrow x''=-\dfrac{7}{6}$

Exercice N°5 :

$(E): x^2-2x\sqrt{5}-8=0$

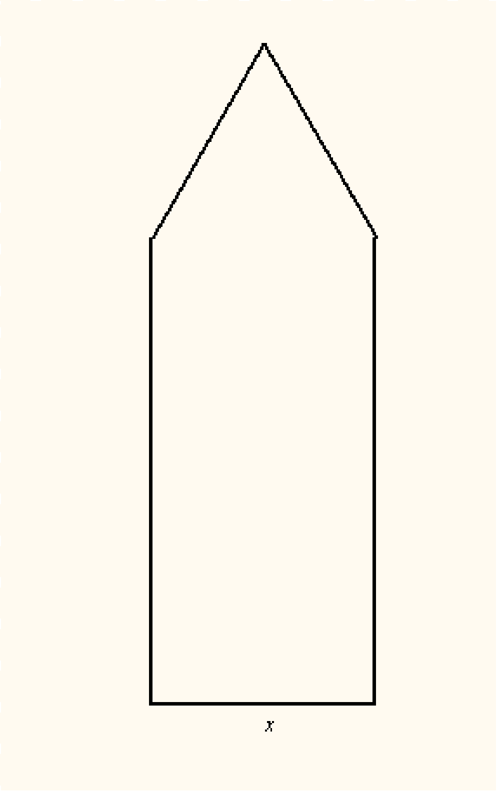
$A=(2x'+1)(2x''+1)=4\underbrace{x'x''}_{\frac{c}{a}}+2\underbrace{(x'+x'')}_{-\frac{b}{a}}+1=4\times(-8)+2\times\left(-2\sqrt{5}\right)+1=-31-4\sqrt{5}$

$B=x'^2+x''^2=\left(x'+x''\right)^2-2x'x''=\left(-2\sqrt{5}\right)^2-2\times(-8)=20+16=36$

Exercice N°10 : « Problèmes d'optimisation »

1. Soient x et y les dimensions du rectangle, on a : $2(x + y) = 40 \Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$
   L'aire du rectangle est : $S = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x$
   $S = -x^2 + 20x = -(x - 10)^2 + 100$
   Or $-(x - 10)^2 \leq 0 \Rightarrow S \leq 100 \Rightarrow$ S atteint son maximum 100 pour $x = 10$
   Ainsi S est maximale lorsque les dimensions du rectangle sont $x = 10$ et $y = 10$ c'est donc un carré.

2. a)



- Le périmètre de la fenêtre est $3x + 2y = 5$
  $\Rightarrow y = \dfrac{5-3x}{2}$

- L'aire de la fenêtre est la somme des aires du rectangle et du triangle

  Soit S_1 l'aire du triangle

  $\Rightarrow S_1 = \dfrac{x \times \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

  Soit S_2 l'aire du rectangle

  $\Rightarrow S_2 = xy = x\left(\dfrac{5-3x}{2}\right) = \dfrac{5x-3x^2}{2}$

  Ainsi $S = S_1 + S_2 = \dfrac{5x-3x^2}{2} + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

  $\Rightarrow S = \dfrac{\left(\sqrt{3}-6\right)x^2+10x}{4}$

b) Soit $S_{\max}$ l'aire maximale de la fenêtre, on a : $S(x) \leq S_{\max}$ pour tout x.

signifie $\dfrac{\left(\sqrt{3}-6\right)x^2+10x}{4} \leq S_{\max}$ signifie $\left(\sqrt{3}-6\right)x^2+10x-4S_{\max} \leq 0$ pour tout x

Or un trinôme du second degré garde un signe constant (signe de a) tout en s'annulant lorsque son discriminant est nul donc $\Delta' = 25 + 4\left(\sqrt{3}-6\right)S_{\max} = 0$ signifie $S_{\max} = \dfrac{25}{4\left(6-\sqrt{3}\right)}$.

Dans ce cas $x = -\dfrac{b'}{a} = -\dfrac{5}{\sqrt{3}-6} = \dfrac{5\left(6+\sqrt{3}\right)}{33}$.