POLYNOMES

Vrai/Faux

Parmi les 5 affirmations suivantes, dites si elles sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, les démontrer, si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

A1. Si une fonction polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.

A2. Une fonction polynôme admet toujours une racine réelle.

A3. La fonction polynôme P définie par $P(x) = x^5 + x^4 + 7x + 1$ n'a pas de racines positives.

A4. Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.

A5. Si α est une racine de deux fonctions polynômes R et S, alors $R(x) - S(x)$ est factorisable par $x - \alpha$.

Exercice 1

Démontrer que la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^3 + x - 1$ possède une racine réelle $\alpha \in [0 ; 1]$.

(Il n'est pas demandé de la calculer)

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies sur IR par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2 + x - 1$. On note C_f et C_g leurs représentations graphiques respectives.

Calculer coordonnées des points d'intersections de C_f et C_g.

Exercice 3

On considère la fonction P définie par $P(x) = (x^2 + 1)^2 - (4x + 2)^2$.

1. Montrer que P est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 4

On considère la fonction polynôme P définie $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + k$ où k est un nombre réel.

1. Déterminer la valeur du réel k pour $x = 4$ soit une racine de P.
2. Pour la valeur de k obtenue à la question 1), résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

Exercice 5

Résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x^2 + 3x - 10}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8} > 0$.

(On pourra, s'il y a lieu, factoriser le numérateur et le dénominateur puis faire un tableau de signes)

Exercice 6

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

On note α, β et γ ses racines (elles existent !).

1. Écrire en fonction de α, β et γ la forme (totalement) factorisée de $P(x)$.
2. Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = 5$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3$ et $\alpha\beta\gamma = -1$.
3. Sachant que $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ et $\beta = 1$, calculer (simplement) la troisième racine γ.

Exercice 7

Le but de cet exercice est de montrer qu'un entier N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

À l'entier N qui s'écrit $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ dans le système décimal, on associe le polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, ainsi $N = P(10)$

Un exemple :

Au nombre $N = 9873$, on associe la fonction polynôme $P(x) = 9x^3 + 8x^2 + 7x + 3$, ainsi $N = P(10)$.

1. Soit S la somme des chiffres de N. Montrer que $S = P(1)$.
2. On pose $P'(x) = P(x) - S$. Montrer que 1 est une racine de $P'(x)$.
3. En déduire que $P(x) = (x - 1)Q(x) + S$ où Q est une fonction polynôme de degré $n - 1$.
4. Montrer que $N = 9Q(10) + S$. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

Exercice 8

On considère l'expression $f(x) = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^3 + \left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)^3$

1. Démontrer que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
2. Démontrer que f est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 9

On considère la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Montrer que $x = -1$ est une racine de P.
3. Déterminer une fonction polynôme Q du troisième degré telle que $P(x) = (x + 1)Q(x)$.
4. Déterminer les racines de Q. [On pourra s'inspirer des questions précédentes.]
5. Résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.

Exercice 10

Résoudre $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ et $x^4 - x^2 - 12 = 0$

Exercice 11

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 1 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 4x + 2$ pour tout x réel.

On note C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$.

1. Dresser les tableaux de variations de f et g.
2. Résoudre l'inéquation $g(x) > 0$ et interpréter graphiquement.
3. Tracer C_f et C_g en précisant les coordonnées des points d'intersection éventuels.

Exercice 12

Factoriser (sur IR) : $P(x) = x^4 - 1$

Exercice 13

On donne la fonction rationnelle F définie par : $F(x) = \dfrac{-2x^3 + 11x^2 - 7x - 20}{x^2 - 2x - 3}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. Factoriser le numérateur et le dénominateur de F, puis simplifier l'expression de $F(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $F(x) < 0$.

Exercice 14

Résoudre les équations :

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. (On pourra remarquer que $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$)

$3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0$. (On pourra remarquer que $3x^3 + x^2 = x^2(3x + 1)$)

Exercice 15

Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 admettant 1, -3 et -4 pour racines et telle que $P(2) = 90$.

Exercice 16

On considère la fonction polynôme définie par :

$$Q(x) = 2x^3 - 7x + 2.$$

1. Vérifier que -2 est une racine de Q.
2. Factoriser Q et résoudre l'équation $Q(x) = 0$.

Exercice 17

On donne la fonction rationnelle F définie par : $F(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{-2x^2 - 3x + 5}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. Factoriser le numérateur et le dénominateur de F, puis simplifier l'expression de $F(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $F(x) < 0$.

Exercice 18

On considère la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$$

1. Vérifier que $\lambda = -2$ est une racine de P.
2. En déduire une factorisation maximale de P.
3. Résoudre l'inéquation : $3x(4 - x) < 2(x^3 - 10)$

Exercice 19

On considère la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18.$$

1. Calculer $P(2)$. En déduire que $x_1 = 2$ est une racine de P.
2. Factoriser P.
3. Résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.

Exercice 20

Résoudre l'équation suivante : $x^2 - (J + M)x + JM = 0$

(Par exemple, si la date de naissance est le 4 Mars ($J = 4$ et $M = 3$), il faut résoudre l'équation

$$x^2 - 7x + 12 = 0)$$

Exercice 21

Résoudre l'inéquation suivante :

$$x^4 - \left(1 + (M+1)^2\right) x^2 + (M+1)^2 > 0$$

(Avec l'exemple ci-dessus ($M = 3$), l'inéquation devient $x^4 - 17x^2 + 16 > 0$)

Indication : on pourra poser $X = x^2$, puis factoriser et enfin faire un tableau de signes...

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -x^3 + 3Mx^2 - 3\left(M^2 - 1\right)x + J$

(Avec toujours le même exemple ($J = 4$ et $M = 3$), la fonction f s'écrit :

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 4)$$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f. (On ne précisera pas les valeurs des éventuels extremums...)

Exercice 23

Le but de l'exercice est d'établir l'égalité suivante : $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$

1. On pose $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Calculer $\alpha^3+\beta^3$ et $\alpha\beta$.

2. Démontrer que, pour tous réels A et B, on a :

$$(A^3+B^3)=(A+B)(A^2-AB+B^2) \quad \text{puis que} \quad (A^3+B^3)=(A+B)((A+B)^2-3AB)$$

3. En déduire, que le réel $\alpha+\beta$ est solution de l'équation $x^3+3x-4=0$.

4. Résoudre l'équation $x^3+3x-4=0$ puis conclure.

Exercice 24

1. Factoriser, sur IR, l'expression : x^3-1.
2. Déterminer les réels A, B et C tels que : $\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

Exercice 25

Soit $A(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ où $n\in \mathrm{IN}^*$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $A(n)=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$.

2. Exprimer, en fonction de n, la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

Exercice 26

Résoudre l'équation : $x+x^3+x^5+x^7=0$

(Indication : peut-il y avoir une solution strictement positive ? Et une solution strictement négative ?)