Exercice2 (5 points)

1°. Étude d'une fonction f.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0 ,+∞[par : $f\ (x) = \frac{\ln x}{x}$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère.

La courbe de la fonction f est représentée en annexe.

1.a) Déterminer les limites de f en 0, puis en +∞ .

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

1.b) Calculer la dérivée f ' de la fonction f sur]0 ,+∞[.

1.c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

1.d) Construire la courbe de la fonction f dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

2°. Étude d'une fonction g.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle]0 ,+∞[par : $g\ (x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère.

2.a) Justifier l'égalité suivante : pour tout x∈]0 ,+∞[: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\frac{(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$

2.b) Déterminer les limites de g en 0, puis en +∞ .

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2.c) Calculer la dérivée g ' de la fonction f sur]0 ,+∞[.

2.d) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3°) Étude de la position relative des deux courbes

3.a) Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

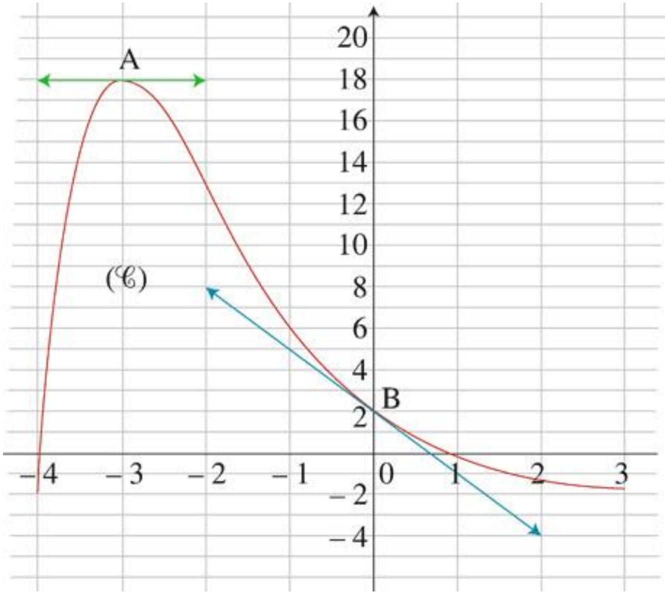
3.b) Étudier la position relative des courbes C_f et C_g .

3.c) Construire la courbe de la fonction g dans le même repère

L.Elfarabi-Manouba	*devoir synthèse n°2*	*2023/2024*
Chaabane Mounir	*3 heurs*	*bac info*

Exercice 1 (5 points)

La courbe (C_f) ci-après représente dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [– 4 ; 3]. Les points A d'abscisse – 3 et B(0 ; 2) sont sur la courbe (C_f).



Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe (C_f) respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f ′ la fonction dérivée de f.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1 Par lecture graphique, déterminer :

a. f ′ (– 3) ;

b. f (0) et f ′(0).

2 La fonction f est définie sur [- 4 ; 3] par f (x) = a + (x + b)e^{-x} où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

a. Calculer f ′(x) pour tout réel x de [– 4 ; 3].

b. À l'aide des questions 1.b. et 2.a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases}$$

c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur[– 4 ; 3] par : f (x) = – 2 + (x + 4)e^{-x}.

1 Justifier que, pour tout réel x de [– 4 ; 3], f ′(x) = (– x – 3)e^{-x} et en déduire le tableau de variation de f sur [– 4 ; 3].

2 Montrer que l'équation f (x) = 0 admet une unique solution α sur [– 3 ; 3],

Exercice 3 (5points)

On donne les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & -5 & -2\end{pmatrix}$

1) a) Montrer que la matrice A est inversible

b) Calculer $A\times B$ et en déduire A^{-1} la matrice inverse de A

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$

La courbe C représentée ci-dessous est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle admet :

- Une branche parabolique de direction $(O\ ;\vec{j}\,)$ au voisinage de $-\infty$
- Une asymptote horizontale d'équation y = 0 au voisinage de $+\infty$
- Deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 1
- La tangente T au point d'abscisse – 1 a pour équation $y=-2e\,x-e$

A l'aide du graphique et des renseignements fournis donner :

a) $f(1)$; $f(-1)$ et $f'(-1)$

3) On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ où a,b,c sont des réels

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\left(-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\right)e^{-x}$

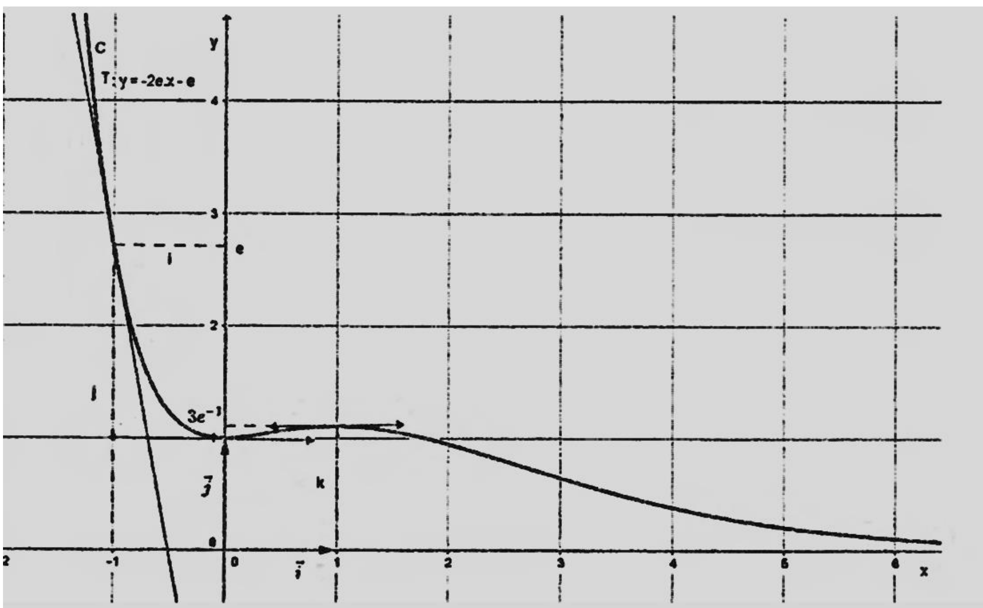
b) Montrer que les réels a, b et c vérifient le système

$$(S):\begin{cases}a+b+c=3\\ a-b+c=1\\ -3a+2b-c=-2\end{cases}$$

c) Ecrire le système (S) sous forme matricielle et en déduire l'expression de $f(x)$

4) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\left(-x^2-3x-4\right)e^{-x}$

a) Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.



Exercice 4 (5points)

Pour les réseaux informatiques, le terme de bande passante est synonyme de taux de transfert de données.

Le tableau suivant donne l'évolution en Tunisie, entre les années 2011 et 2015, du nombre d'abonnés au réseau internet par 1000 habitants et la largeur de la bande passante internationale d'internet (en Gb/S)

Année (t_i)	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre d'abonnés au réseau internet (x_i par 1000 habitants)	80	103	128	154	159
Largeur de la bande internationale d'internet (y_i en Gb/S)	60	82.5	90	130	180

(Source : Ministère des Technologies de l'information et de communication)

On pose $x=(x_i)$, $y=(y_i)$ et $t=(t_i)$.

1) a) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (t,x).

b) Déterminer une équation de la droite de régression de x en t.

c) Donner une prévision de la valeur x_i pour l'année $t_i = 2020$.

2) On envisage un ajustement exponentiel de la série (x, y). Pour cela on pose $z = \ln(y)$.

Le tableau suivant donne les valeurs de x et z arrondies à 10^{-3} près.

x_i	80	103	128	154	159
$z_i = \ln(y_i)$	4,094	4,413	4,5	4,868	5,193

a) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x, z).

b) En déduire qu'un ajustement affine de la série (x, z) par la méthode des moindres carrés est justifié.

c) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

d) Etablir la relation $y = Ae^{Bx}$ où A et B sont deux réels que l'on déterminera.

3) Donner une prévision de la largeur de la bande passante internationale y_i pour l'année $t_i = 2020$.