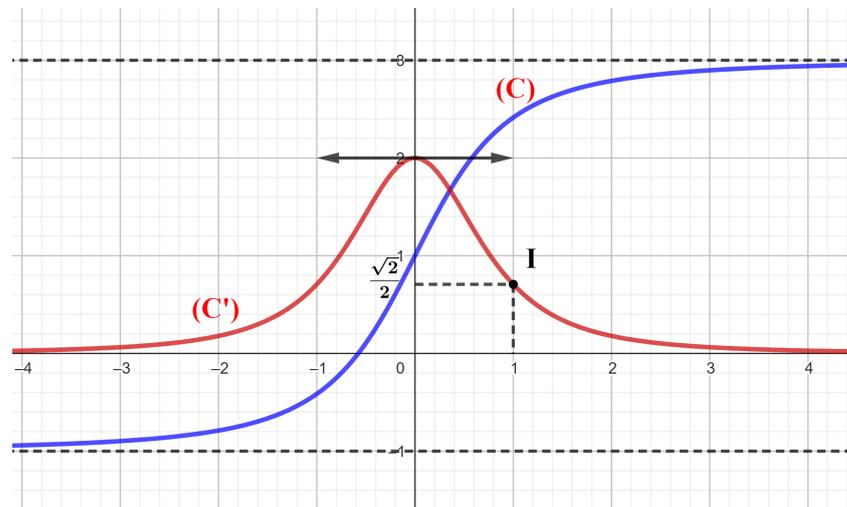


Devoir Synthèse n°1

Exercice N 1 (7 points)

Soit f une fonction définie, continue et deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On donne dans le graphique ci-dessous la représentation graphique dans un repère orthonormé direct la courbe (C'_f) de la fonction dérivée f' de f . Notons que:

- Les droites $y = -1$ et $y = 3$ sont des asymptotes de (C) et la droite $y = 0$ est asymptote de (C') .
- La courbe (C) n'admet aucune tangente horizontale et la courbe (C') admet une seule tangente horizontale.
- Le point $I \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ appartient à (C') .



- Justifier que (C) est la courbe de f .
 - Déterminer $f'(0)$; $f''(0)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 - f(x)}$
 - Montre que le point $A(0, 1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) .
 - Donner une équation de la tangente (T) à (C) en A .
- Déterminer $f'([1, +\infty[)$.
 - En déduire que pour tout $x \in [1, 3]$, $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 3[$.
 - Placer le réel α sur l'axe des abscisses (Figure N1)
- On pose f^{-1} sa fonction réciproque. Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.
 - Dresser le tableau de variation de f^{-1}
 - Tracer la courbe de f^{-1} dans l'annexe (figure N 1)

5 On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq \alpha$.

b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$.

c En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

d Déduire que la suite U_n est convergente et calculer sa limite .

Exercice N 2(4 points)

1 On considère l'équation $(E) : z^2 - (\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 0$.

a Vérifier que 2 est une solution de (E)

b Déduire l'autre solution de (E) .

2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixe respectives $z_A = 2$ et $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a Mettre z_B sous forme exponentielle .

b Placer les deux points A et B .

3 Soit le point C d'affixe $z_C = 2 + z_B$.

a Vérifier que $OACB$ est un losange .

b Placer le point C

4 a Montrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}}$.

b Déduire la forme exponentielle de z_C

c Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

Exercice N 3(4 points)

Dans l'espace E muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(-3, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 1, 2)$ et $D(3, 1, 1)$

1 a Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b Déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés .

c Calculer l'aire du triangle ABC .

2 a Montrer que les points A, B, C , et D ne sont pas coplanaires .

b Soit V le volume du tétraèdre $ABCD$. Montrer que $V = \frac{1}{2}$.

c Soit H le projeté orthogonale de D sur le plan ABC . Calculer DH

Exercice N 4(5 points)

Soit la fonction f définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Étudier la dérivabilité de f à droite de 2 . Interpréter graphiquement le résultat .
 - b Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$. Interpréter graphiquement le résultat .

- 2
 - a Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et que $f'(x) = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.
 - b Montrer que f réalise une bijection de $]2, +\infty[$ sur un un intervalle J que l'on déterminera .

- 3 Soit f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f
 - a Montrer que f^{-1} est dérivable à gauche en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$.
 - b Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
 - c Tracer la courbe (C_f) de (f) et celle de f^{-1} dans le même repère (figure N2)

Annexe à rendre avec votre copie

Nom et prénom

Figure N°1(Exercice N°1)

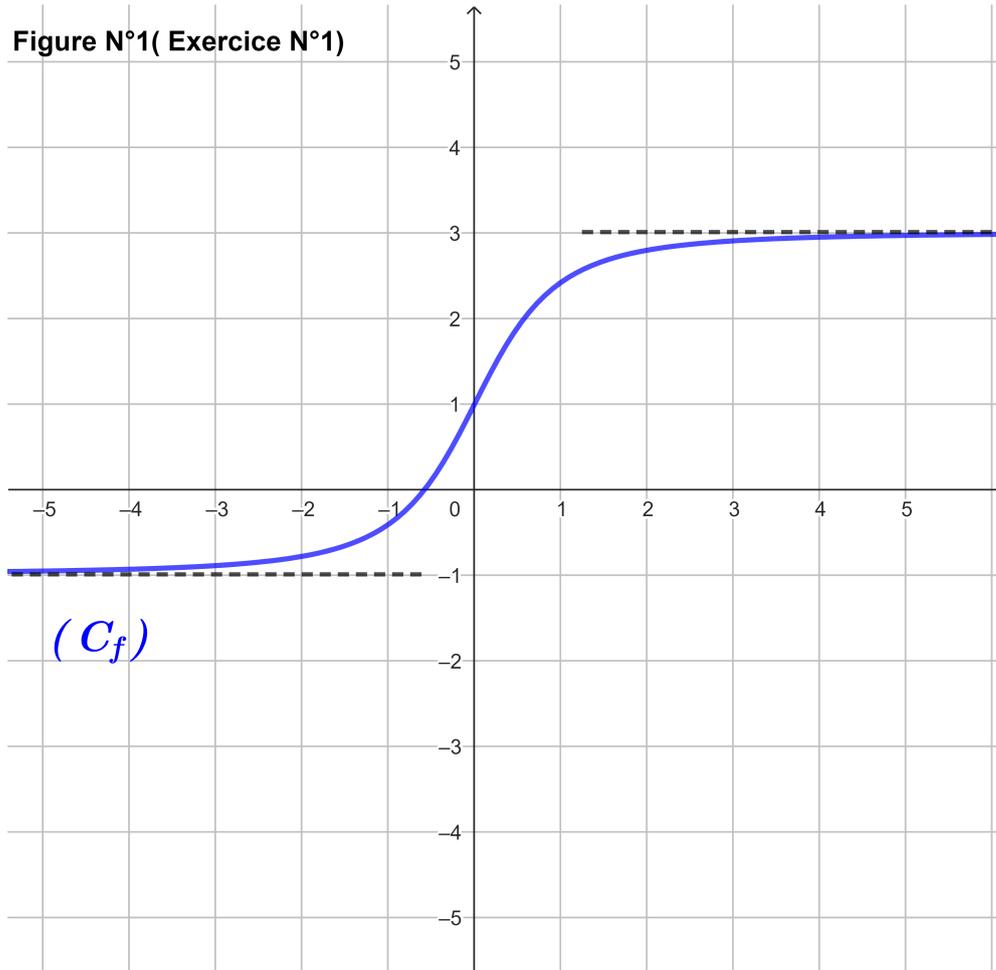


figure N°2(exercice 4)

