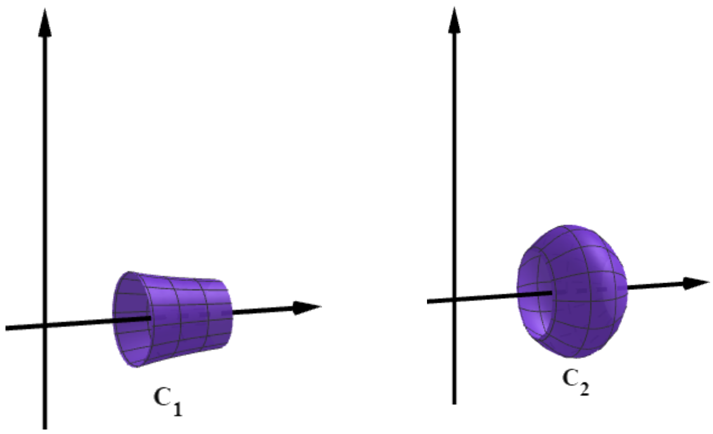
Devoir de Synthèse n°2

Exercice N 1 (3 points)

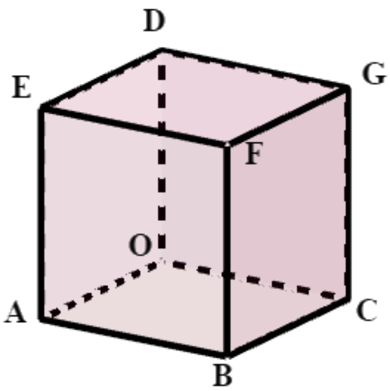
On considère les deux fonctions définie sur $[\frac{\pi}{2},\pi[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}}$ et $g(x)=\sqrt{\frac{1}{x}-\sin(2x)}$.
Soit $a\in[\frac{\pi}{2},\pi[$; $C_1=\{M(x,y);\ \text{tel que } y=f(x) \text{ et } x\in[\frac{\pi}{2},a]\}$
et $C_2=\{M(x,y);\ \text{tel que } y=g(x) \text{ et } x\in[\frac{\pi}{2},a]\}$.
On désigne par V_1 le volume du solide engendré par la rotation de C_1 autour de l'axe (Ox) et par V_2 le volume du solide engendré par la rotation de C_2 autour de l'axe (Ox).

1. Montrer que $V_1=\pi\ln\left(\frac{2a}{\pi}\right)$
2. Montrer que $V_2=V_1-\pi\left(\sin^2 a-1\right)$
3. Déterminer a pour que $V_1=V_2$



Exercice N 2 (6 points)

Dans la figure ci-contre $OABCDEFG$ est un cube d'arête 1 .
On muni l'espace du repère $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$.



1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}$.
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACD) est $x+y+z-1=0$.
2. Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD)
   a) Donner une équation paramétrique de la droite Δ .
   b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de Δ et du plan (ACD) .
3. on désigne par S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :
   $3x^2+3y^2+3z^2-4x-4y-4z+1=0$
   a) Montrer que S est une sphère centre $I\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ et de rayon 1 .
   b) le point A appartient-il à S ?.
4. a) Vérifier que le point I appartient à la droite Δ.
   b) Justifier que le plan (ACD) coupe la sphères S suivant un cercle que l'on déterminera

Exercice N 3 (5 points)

Un sac contient deux boites B_1 et B_2 indiscernables au toucher .
- La boite B_1 contient deux boules rouges et une boule noire .
- La boite B_2 contient deux boules rouges et deux boules noires .

Toutes les boules sont indiscernables au toucher .
Une épreuve consiste à choisir , au hasard, une boite puis de tirer au hasard et simultanément deux boules de cette boite .
Soit A l'évènement ≪ obtenir deux boules de même couleur ≫ .
Et l'évènement C ≪ les deux boules tirés proviennent de la boite B_1 ≫ .

1. a. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égal à $\frac{1}{3}$.

   b. Sachant que les deux boules tirées sont de même couleur, quelle est la probabilité pour qu'elles aient été tirées de la boite B_1

2. On répète l'épreuve n fois, en remettant chaque fois, les deux boules tirées dans leur boite et la boite tirées dans le sac . n désigne un entier naturel tel que $n \geq 2$

   Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de fois où on obtient deux boules de même couleur

   a. k étant un entier naturel inférieur ou égal à n . Calculer $p(X = k)$.

   b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

   c. On désigne par p_n la probabilité d'obtenir au bout de n tirages au moins une fois deux boules de même couleur . Calculer p_n en fonction de n.

   d. Quelle est la valeur minimale de n pour que p_n dépasse $0,9$

Exercice N 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\,(1 - \ln x)^2 + 1 & \textbf{si} \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat .

2. a. En utilisant l'égalité : $x \ln^2 x = \left(\sqrt{x} \ln x\right)^2$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
   Montrer que $\lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x = 0$.

   b. En déduire que f est continue à droite en 0.

   c. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat .

3. Dans la figure de l'annexe ci-jointe , on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   - La courbe Γ de la fonction dérivée f' de f .
   - La tangente (Δ) à la courbe (C) au point $A(1, 2)$.

   On sait que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses au points d'abscisses $\frac{1}{e}$ et e et quelle admet au point $B(1, -1)$ une tangente horizontale .

Par lecture graphique :

a) Déterminer le signe de f' sur $]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que A est un point d'inflexion de la courbe (C) .

4) Tracer la courbe (C) dans l'annexe ci-jointe .

5) Soit $0 < \lambda < \dfrac{1}{e}$.

On désigne par A_λ la partie du plan limitée par Γ la courbe de la fonction f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \dfrac{1}{e}$.

Montrer que $A_\lambda = 1 + \dfrac{4}{e} - f(\lambda)$ et en déduire $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A_\lambda$

Annexe à rendre avec votre copie

Nom et prénom .... Classe ....