INTEGRALE (bac scientifique) Mr. FATNASSI BECHIR

EXO. N°4 : (ENONCE)

Calculer les intégrales suivantes :

1°/ Au moyen d'une primitive :

a / $I=\int_{-1}^{2}\left(3x^2+x-2\right)dx$ b / $I=\int_{0}^{1}\left(1-e^{-2x}\right)dx$ c / $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t).\left(\sin t\right)^5 dt$

d / $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}tg(x)\,dx$ e / $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}tg^2(x)\,dx$ f / $I=\int_{2}^{3}\frac{1}{x.\ln(x)}dx$ g / $I=\int_{1}^{2}\frac{\ln(t)}{t}dt$

h / $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x).\cos(2x)\,dx$; i / $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4(x)\,dx$; j / $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x).\cos(3x)\,dx$

2°/ A l'aide d'une intégration par parties :

a / $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t.\sin(t)\,dt$; b / $I=\int_{0}^{1}t.e^{-2t}dt$; c / $I=\int_{1}^{2}\ln(x)\,dx$

d / $I=\int_{1}^{2}x.\ln(x)\,dx$ e / $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}t.\left(1+tg^2t\right)dt$

3°/ A l'aide d'une double intégration par parties :

a / $I=\int_{0}^{1}\left(3x^2-2x+1\right).e^{X}dx$ et $L=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t^2.\sin(t)\,dt$

b / Calculer $I=\int_{0}^{\pi}\sin(2x).e^{-2x}dx$ et $J=\int_{0}^{\pi}\cos(2x).e^{-2x}dx$

Déduire $H=\int_{0}^{\pi}\sin^2(x).e^{-2x}dx$ et $K=\int_{0}^{\pi}\cos^2(x).e^{-2x}dx$

FATNASSI BECHIR

EXO. N°4 : (SOLUTION)

1°/ a / $I=\int_{-1}^{2}(3x^2+x-2)\,dx=\left[x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}=(8+2-4)-\left(-1+\frac{1}{2}+2\right)=\frac{9}{2}$

b / $I=\int_0^1(1-e^{-2x})\,dx=\left[x+\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1=\left(1+\frac{1}{2}e^{-2}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1+e^{-2}}{2}$

c / $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t).(\sin t)^5dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u'(t).(u(t))^5dt$ avec $u(t)=\sin(t)$

$=\left[\frac{1}{6}(u(t))^6\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{1}{6}(\sin(t))^6\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}$

d / $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{u'(x)}{u(x)}dx$ avec $u(x)=\cos(x)$

$=-\left[\ln|u(x)|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\ln(2).$

e / $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^2(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[(1+tg^2(x))-1\right]\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2(x))\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\,dx=\left[tg(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$

f / $I=\int_2^3\frac{1}{x.\ln(x)}\,dx=\int_2^3\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx=\int_2^3\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$ Avec $u(x)=\ln(x)$

$=\left[\ln|\ln(x)|\right]_2^3=\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)$

g / $I=\int_1^2\frac{\ln(t)}{t}\,dt=\int_1^2\frac{1}{t}\ln(t)\,dt=\int_1^2u'(t).u(t)\,dt$ Avec $u(t)=\ln(t)$

$=\left[\frac{1}{2}(u(t))^2\right]_1^2=\left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^2=\frac{(\ln(2))^2}{2}$

h / $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x).\cos(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(4x)\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{1}{4}$

i / $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4(x)\,dx$

$(\cos x)^4=\left[(\cos(x))^2\right]^2=\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2=\frac{1+2\cos(2x)+(\cos(2x))^2}{4}$

$=\frac{1}{4}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{\frac{1+co(4x)}{2}}{4}=\frac{1}{4}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1+\cos(4x)}{8}=\frac{3}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{\cos(4x)}{8}$

Donc : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{\cos(4x)}{8}\,dx=\left[\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}$

j / $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x).\cos(3x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\sin(5x)-\sin x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(5x)}{5}+\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{5}$

On a : $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$ et $\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$

D'où : $\cos a.\sin b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$

2°/ a / $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\sin(t)\,dt$ On pose : $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=\sin(t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=-\cos(t)\end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\sin(t)\,dt=\left[-t\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)dt=0+\left[\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

b / $I=\int_0^1 t.e^{-2t}dt$ On pose : $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=e^{-2t}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{cases}$

$$I=\int_0^1 t.e^{-2t}dt=\left[-\frac{1}{2}t.e^{-2t}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^1=-\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}=\frac{1-3e^{-2}}{4}$$

c / $I=\int_1^2 \ln(x)\,dx$ On pose : $\begin{cases}u(x)=Log(x)\\ v'(x)=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(t)=x\end{cases}$

$$I=\int_1^2 \ln(x)\,dx=\left[x.\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2 dx=2\ln(2)-(2-1)=-1+2\ln(2)$$

d / $I=\int_1^2 x.\ln(x)\,dx$ On pose : $\begin{cases}u(x)=\ln(x)\\ v'(x)=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 x.\ln(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2.\ln(x)\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

$$=2.\ln(2)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=2.\ln(2)-\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=2.\ln(2)-\frac{3}{4}$$

e / $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} t.(1+tg^2t)\,dt$ On pose : $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=1+tg^2(t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=tg(t)\end{cases}$

$$=\left[t.tg(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg(t).dt=\frac{\pi}{4}-\left[\ln(\cos(t))\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.\ln(2)$$

3°/ a / * $I=\int_0^1 (3x^2-2x+1).e^x\,dx$ On pose : $\begin{cases}u(x)=3x^2-2x+1\\ v'(x)=e^x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=6x-2\\ v(t)=e^x\end{cases}$

$$I=\left[(3x^2-2x+1)e^x\right]_0^1-\int_0^1(6x-2)e^x dx=2e-1-J$$

Avec $J=\int_0^1(6x-2).e^x dx$ Calculons J : On pose : $\begin{cases}u(x)=6x-2\\ v'(x)=e^x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=6\\ v(x)=e^x\end{cases}$

D'où $J=\left[(6x-2)e^x\right]_0^1-6\int_0^1 e^x dx=4e+2-6\left[e^x\right]_0^1=4e+2-6(e-1)=8-2e$

Donc : $I=2e-1-J=2e-1-(8-2e)=4e-9$

* $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2.\sin(t)\,dt$ On pose : $\begin{cases}u(t)=t^2\\ v'(t)=\sin t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(t)=2t\\ v(t)=-\cos(t)\end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2.\sin(t)\,dt=\left[-t^2\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)\,dt=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)\,dt=2J$$

Avec $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)dt$ Calculons J : On pose : $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=\cos(t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=\sin(t)\end{cases}$

$$J=\left[t.\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)dt=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

Donc : $L=2.J=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2$

b / $* \ I=\int_0^{\pi}\sin(2x).e^{-2x}\,dx$ On pose : $\begin{cases}u(x)=\sin(2x)\\ v'(x)=e^{-2x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=2\cos(2x)\\ v(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{cases}$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}.\sin(2x)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{-2x}.\cos(2x)dx=\int_0^{\pi}e^{-2x}.\cos(2x)dx=J$$

On pose : $\begin{cases}u(x)=\cos(2x)\\ v'(x)=e^{-2x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=-2\sin(2x)\\ v(x)=-\frac{1}{2}.e^{-2x}\end{cases}$

$$I=J=\int_0^{\pi}e^{-2x}.\cos(2x)dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-2x}.\sin(2x)dx=-\frac{1}{2}e^{-2\pi}+\frac{1}{2}-I$$

$$\Leftrightarrow\ 2I=-\frac{1}{2}e^{-2\pi}+\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ I=\frac{1-e^{-2\pi}}{4}$$

$* \ J=\int_0^{\pi}e^{-2x}.\cos(2x)dx=I=\frac{1-e^{-2\pi}}{4}$

$* \ H+K=\int_0^{\pi}e^{-2x}\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)dx=\int_0^{\pi}e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\pi}=\frac{1-e^{-2\pi}}{2}$

$* \ K-H=\int_0^{\pi}e^{-2x}\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)dx=\int_0^{\pi}e^{-2x}.\cos(2x)\,dx=J=\frac{1-e^{-2\pi}}{4}$

$\begin{cases}K+H=\frac{1-e^{-2\pi}}{2}\\ K-H=\frac{1-e^{-2\pi}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}K+H=\frac{2-2e^{-2\pi}}{4}\\ K-H=\frac{1-e^{-2\pi}}{4}\end{cases}$ **IL en résulte** : $K=\frac{3-3e^{-2\pi}}{4}$ et $K=\frac{1-e^{-2\pi}}{8}$

<u>Prof. Mr. FATNASSI BECHIR</u>

<u>LYCEE SECONDAIRE DE KORBA</u>

FATNASSI BECHIR