

Exo. n°13' : (Enoncé)

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1, 2, 0)$ et $B(1, 1, 2)$.

1°/ Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2°/ Soit P et Q les deux plans perpendiculaire à la droite (AB) et passant respectivement par A et B.

a / Montrer que le plan P a pour équation : $2x - y + 2z + 4 = 0$

b / Trouver une équation cartésienne du plan Q.

3°/ On considère la sphère S dont l'intersection avec le plan P est le cercle (C) de centre A et de rayon 1 et l'intersection avec le plan Q est le cercle (C') de centre B et de rayon 4.

a / Montrer que le centre I de la sphère S appartient à la droite (AB) et déduire que les coordonnées

$$(a, b, c) \text{ de I vérifient : } \begin{cases} a - c = 1 \\ c + 2b = 4 \end{cases}$$

b / Montrer que $IA^2 - IB^2 = 15$ puis déduire que $2a - b + 2c = 8$.

c / Calculer les coordonnées de I. ainsi que le rayon R de S.

d / Donner une équation cartésienne de S.

Exo. n°13' : (Solution)

1°/ On a : $A(-1, 2, 0)$ $B(1, 1, 2)$ donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$M(x, y, z) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (AB) : \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

2°/ a / La droite (AB) est perpendiculaire à P donc \overrightarrow{AB} est un vecteur normal du plan P.

D'où une équation cartésienne de P est : $2x - y + 2z + d = 0$

On a : $A(-1, 2, 0) \in P \Leftrightarrow -2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$.

Conclusion : une équation cartésienne de P est : $2x - y + 2z + 4 = 0$

b / De même la droite (AB) est perpendiculaire à Q donc \overrightarrow{AB} est un vecteur normal du plan Q.

D'où une équation cartésienne de Q est : $2x - y + 2z + d = 0$

On a : $B(1, 1, 2) \in Q \Leftrightarrow 2 - 1 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -5$

Conclusion : une équation cartésienne de Q est : $2x - y + 2z - 5 = 0$

3°/ $P \cap S = C(A, R = 1)$ donc A est le projeté orthogonal du centre I de la sphère S sur le plan P.

et $Q \cap S = C'(B, R' = 4)$ donc B est le projeté orthogonal du centre I de la sphère S sur Q.

a / $\left. \begin{matrix} (IA) \perp P \\ (AB) \perp P \end{matrix} \right\}$ donc les droites (IA) et (AB) sont parallèles $\Leftrightarrow (IA) = (AB)$ donc $I \in (AB)$

$$I(a, b, c) \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + 2\alpha & (1) \\ b = 2 - \alpha & (2) \\ c = 2\alpha & (3) \end{cases} \quad \text{Donc} \quad \begin{cases} a - c = -1 & (1) - (3) \\ c + 2b = 4 & (3) + 2 \times (2) \end{cases}$$

$$\text{b / On a : } \left. \begin{array}{l} IA^2 = R^2 - 1 \\ IB^2 = R^2 - 16 \end{array} \right\} \text{ donc : } IA^2 - IB^2 = 15.$$

$$\begin{aligned} \text{On a aussi : } IA^2 - IB^2 &= (-1-a)^2 + (2-b)^2 + c^2 - (1-a)^2 - (1-b)^2 - (2-c)^2 \\ &= 1 + 2a + a^2 + 4 - 4b + b^2 + c^2 - 1 + 2a - a^2 - 1 + 2b - b^2 - 4 + 4c - c^2 = 4a - 2b + 4c \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } IA^2 - 5B^2 = 15 \Leftrightarrow 4a - 2b + 4c = 16 \Leftrightarrow 2a - b + 2c = 8$$

$$\text{c / On a donc en résumé : } \begin{cases} a - c = -1 \\ c + 2b = 4 \\ 2a - b + 2c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c - 1 & (1) \\ b = -\frac{1}{2}c + 2 & (2) \\ 2c - 2 + \frac{1}{2}c - 2 + 2c = 8 & (3) \end{cases}$$

$$\text{L'équation (3) donne : } \frac{9}{2}c = 12 \Leftrightarrow c = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$$(1) \text{ donne : } a = \frac{5}{3} ; \quad (2) \text{ donne : } b = \frac{2}{3} \quad \text{il résulte que : } I\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\text{On a : } IA = \sqrt{\left(-1 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{16} = 4$$

$$R^2 = IA^2 + r^2 = 16 + 1 = 17 \Leftrightarrow R = \sqrt{17}$$

S est donc la sphère de centre $I\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{17}$

$$\text{et d'équation } S: \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = 17$$

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR