

GEOMETRIE (bac exp et tech) Mr. FATNASSI BECHIR

Exo. n°13 : (Enoncé)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan $(P_m): 2x + 2y - z + m = 0$; où m un paramètre réel et les points $A(3, -2, -1)$; $B(-1, 2, -1)$

1°/ Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de diamètre $[AB]$.

Déterminer son rayon R et les coordonnées de son centre I .

2°/ Déterminer le réel m pour lesquels (P_m) est tangent à S .

3°/ Déterminer une équation cartésienne du plan (P') perpendiculaire à (P_m) contenant la droite (AB) .

4°/ Soit Q le plan parallèle à (P_m) et contenant le point $C(0, 0, 1)$.

a / Déterminer une équation cartésienne de Q .

b / Donner la position relative de Q et S .

c / Caractériser $Q \cap S$.

Exo. n°13 : (Solution)

1°/ On a : $A(3, -2, -1)$ $B(-1, 2, -1)$ deux points de l'espace ξ .

Soit S la sphère de diamètre $[AB]$.

$$1^{\text{ère}} \text{ méthode : } M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{MB} = 0 \quad ; \quad \overline{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z+1 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{BM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) + (y+2)(y-2) + (z+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 6 = 0$$

Soit : S : $\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8$ une équation cartésienne de S .

2^{ème} méthode : le centre de la sphère S de diamètre $[AB]$ est le point I milieu de $[AB]$, et de

$$\text{rayon } R = \frac{AB}{2}$$

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) \text{ d'où : } I(1, 0, -1) \text{ et } AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+2)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{d'où } R = 2\sqrt{2} \quad \text{Donc : } S(I, R) : (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8$$

2°/ On a le plan $(P_m): 2x + 2y - z + m = 0$; m étant un paramètre réel.

$$(P_m) \text{ est tangent à } S \Leftrightarrow d(I, P_m) = R \Leftrightarrow \frac{|2+1+m|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |m+3| = 6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow m+3 = 6\sqrt{2} \text{ ou } m+3 = -6\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -3 + 6\sqrt{2} \text{ ou } m = -3 - 6\sqrt{2}$$

FATNASSI BECHIR

3°/ Soit P' le plan perpendiculaire à (P_m) et contenant la droite (AB) .

Le plan P' est perpendiculaire à (P_m) donc le vecteur normal $\vec{N} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ de (P_m) est un vecteur directeur de P'

La droite (AB) est contenue dans P' donc le vecteur directeur $\vec{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ de (AB) est un vecteur directeur de P' .

Les vecteurs \vec{N} et \vec{AB} ne sont pas colinéaires donc (\vec{N}, \vec{AB}) est une base de P' .

Si on pose : $\vec{N}' = \vec{N} \wedge \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$ un vecteur normal du plan P' et $P' : 4x + 4y + 16z + d = 0$

d ? on a $A(3, -2, -1) \in (AB) \subset P'$ donc $A \in P' \Leftrightarrow 12 - 8 - 16 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$.

Donc : $P' : x + y + 4z + 3 = 0$

4°/ a / On a : $Q \perp (P_m)$ donc le vecteur normal $\vec{N} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ de (P_m) est aussi un vecteur normal de Q

d'où une équation cartésienne de Q est : $2x + 2y - z + d = 0$.

Le point : $C(0, 0, 1) \in Q \Leftrightarrow -1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$ **Il en résulte que $Q : 2x + 2y - z + 1 = 0$.**

b / $d(I, Q) = \frac{|2+1+1|}{3} = \frac{4}{3} < 2\sqrt{2} = R$ **donc $S \cap Q$ est un cercle $C(H, r)$**

c / On a : $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{8 - \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{56}}{3}$ et H le projeté orthogonal de I sur Q

Le point $H(x, y, z)$ vérifie : $\begin{cases} \vec{IH} = \beta \vec{N} ; \beta \in \mathbb{R} \\ H \in Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\beta & (1) \\ y = 2\beta & (2) \\ z = -1 - \beta & (3) \\ 2x + 2y - z + 1 = 0 & (4) \end{cases}$

(4) donne : $2 + 4\beta + 4\beta + 1 + \beta + 1 = 0$; nous en déduisons $\beta = -\frac{4}{9}$ d'où : $H\left(\frac{1}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{5}{9}\right)$

Sphère (bac exp et tech) Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR