Exo. n°4 : (Enoncé)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -2x + 4 - e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = -x + 2 + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

1°/ Montrer que f est continue en $x_0 = 1$

2°/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3°/ Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty;1[$ et pour $x \in]1;+\infty[$ .Etablir le tableau de variation de f.

4°) a / Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $(-\infty)$.

b / Etudier la position de (D) et (C_f).

5°/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

6°/ Montrer que l'équation $(E): f(x) = 0$ admet une seule solution α comprise entre 3,1 et 3,2.

7°/ Construire (C_f) et (D).

8°/ a / Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b / On note g^{-1} la réciproque de g. Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et calculer $(g^{-1})'(0)$.

c / Tracer (C') la courbe représentative de g^{-1}.

9°/ a / Trouver une primitive de f sur $]-\infty, 1]$.

b / Soit h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $h(x) = x\ln(x) - x$

Calculer $h'(x)$ et déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

c / Déduire l'aire A de la région du plan limitée par (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = e$

Exo. n°4 : (Solution)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \begin{cases} f(x) = -2x+4-e^{x-1} & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = -x+2+\ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1°/ $f(1) = -2+4-e^{0} = 1$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(-2x+4-e^{x-1}\right) = 1 = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(-x+2+\ln(x)\right) = 1 = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow f$ est continue en **1**

2°/ $*$ Dérivabilité de f à droite en 1 : $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-x+2+\ln(x)-1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{-(x-1)}{x-1} + \dfrac{\ln(x)}{x-1}\right) = -1+1 = 0$ **Donc :** f est dérivable à droite en 1 et on a : $f_d'(1) = 0$

$*$ Dérivabilité de f à gauche en 1 : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2x+4-e^{x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2x+3-e^{x-1}}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2x+2-\left(e^{x-1}\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{-2(x-1)}{x-1} - \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\right) = -2-1 = -3$

Car : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{t}-1}{t} = 1$

Donc : f est dérivable à gauche en 1 et on a : $f_g'(1) = -3$

<u>Conclusion :</u> $f_d'(1) \ne f_g'(1)$ Donc f n'est pas dérivable en 1 et (C_f) admet au point $A(1,1)$ deux demi tangentes de directions différentes une à droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (horizontale) l'autre à gauche de vecteur directeur $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

3°/ $*$ $\forall x \in \left]-\infty;1\right[,\ f'(x) = -2-e^{x-1} = -\left(2+e^{x-1}\right) < 0$ $\quad *$ $\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ f'(x) = -1+\dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x} < 0$

$*$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty}(-2x+4) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{x-1} = \lim\limits_{t\to -\infty} e^{t} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↘ $-\infty$

$*$ $\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ f(x) = x\left(-1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty}(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

4°/ a / $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-(-2x+4)\right] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-e^{x-1}\right) = \lim\limits_{t\to -\infty}\left(-e^{t}\right) = 0$ **Donc** : La droite (D) d'équation :

$(D): y = -2x+4$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $(-\infty)$

b / Position de (C_f) et (D) : $\forall x \in \left]-\infty;1\right[,\ f(x)-(-2x+4) = -e^{x-1} < 0$ **Donc :** (C_f) est dessous de (D)

5°/ $*$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = -1 = a$ **(1)**

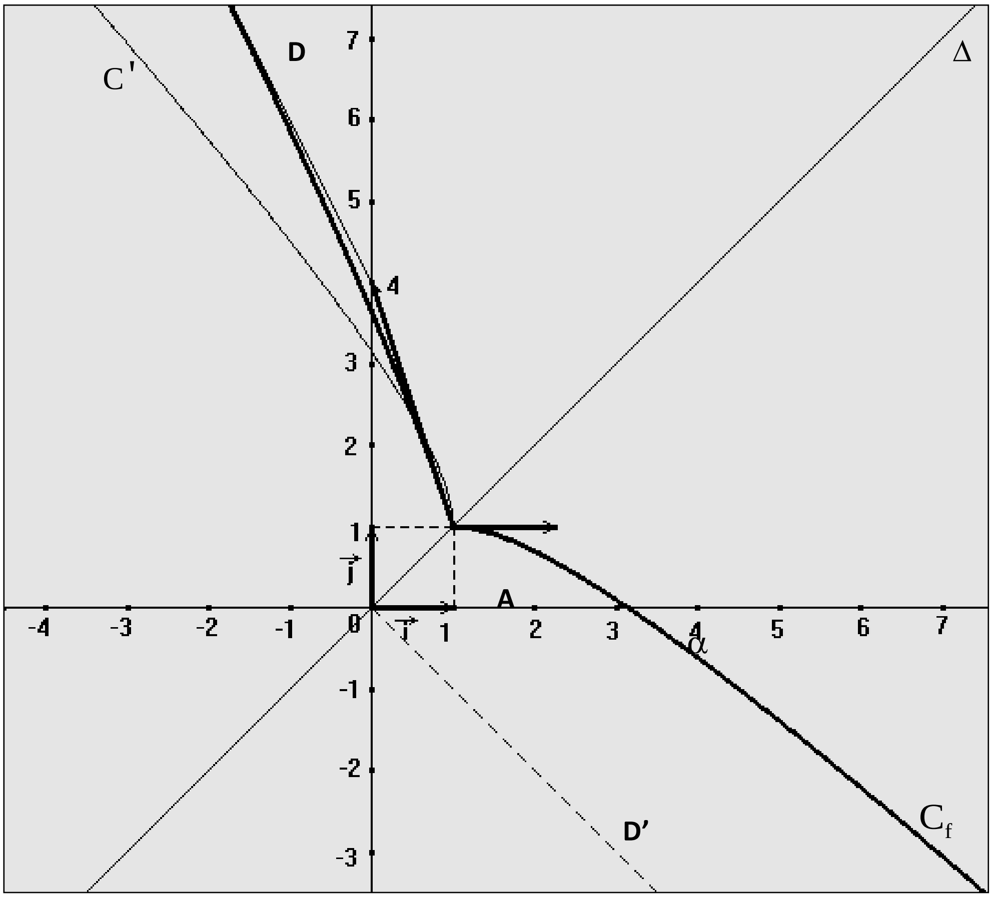
$*$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(2+\ln(x)\right) = +\infty$ **(2)**

FATNASSI BECHIR

(1) et **(2)** montrent que la droite $(D'): y = -x$ est une direction asymptotique à (C_f) au voisinage de $(+\infty)$

6°) $\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue et strictement décroissante sur } [3,1\,;\ 3,2] \\ \left.\begin{array}{l} f(3,1) = 0,0314 > 0 \\ f(3,2) = -0,0368 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3,1) \times f(3,2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\boxed{\text{L'équation } (E): f(x) = 0 \text{ admet une seule solution } \alpha \in \left]3,1\,;\ 3,2\right[}$



8°) a) g est la restriction de f à l'intervalle $]1,+\infty[$ donc $\forall x \in]1;+\infty[,\ g(x) = f(x) = -x + 2 + \ln(x)$

g est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $g(]1,+\infty[) =]-\infty;1[= J$

b) g^{-1} est la réciproque de g :

$\left.\begin{array}{l} g \text{ est dérivable sur }]1;+\infty[\\ g'(x) = \dfrac{1-x}{x} \neq 0, \quad \forall x \in]1,+\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\boxed{\begin{array}{l} g^{-1} \text{ est dérivable sur } g(]1,+\infty[) =]-\infty;1[\text{ et on a :} \\ \forall y \in]-\infty;1[, \quad (g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(y))} \end{array}}$

$* \ 0 \in]-\infty;1[\Rightarrow (g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \dfrac{1}{g'(\alpha)} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$

9°/ a / $\forall x \in]-\infty;1],\ f(x) = -2x + 4 - e^{x-1} \Rightarrow F(x) = -x^2 + 4x - e^{x-1}$

b / $\forall x \in]1,+\infty[,\ h(x) = x.\ln(x) - x$

$\forall x \in]1,+\infty[,\ h'(x) = \ln(x) + \cancel{x}\left(\dfrac{1}{\cancel{x}}\right) - 1 = \ln(x)$ **donc** une primitive de ln(x) est h(x)

$\forall x \in]1;+\infty[,\ f(x) = -x + 2 + \ln(x) \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + h(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + x.\ln(x)$

FATNASSI BECHIR

c / Donc l'aire $A = \int_0^e \left| f(x) \right| dx = \int_0^e f(x)\ dx$ ua . Car $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[\ 0, e\ ]$

$$= \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^e f(x)\ dx$$

$$= \left[-x^2 + 4x - e^{x-1}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x + x.\ln(x)\right]_1^e = \left(2 + \frac{1}{e}\right) + \left(-\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^2 + 2e + \frac{1}{e} + \frac{3}{2} \quad \text{ua.}$$

9°/ a / A l'aide d'une intégration par partie calculer l' intégrale : $I = \int_1^e \ln(x)dx$

$I = \int_1^e \ln(x)\ dx$ On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$$I = \int_1^{e^2} \ln(x)\ dx = \left[x.\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e dx = e.\ln(e) - (e-1) = e - (e-1) = 1$$

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR