Prof : Mr. FATNASSI BECHIR

EXO. (Systèmes)

EXO. : (Enoncé)

1°/ Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Sachant que (C_f) passe par les points $A(1, 1)$ et $B(2, 5)$ et la tangente à (C_f) au point A est de coefficient directeur 2 .

a / Montrer que a , b , c vérifient le système $(S) : \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 4a+2b+c = -3 \\ 2a+b = -1 \end{cases}$

b / Résoudre, par la méthode de pivot de gauss, le système (S)

2°/ Montrer que l'équation $(E) : f(x) = 0$ admet une seule solution α comprise entre 0 et 1.

EXO. : (Solution)

1°/ a / Pour tout réel x ; $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ et $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

- (C_f) passe par le point $A(1, 1) \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + a + b + c = 1$
- (C_f) passe par le point $B(2, 5) \Leftrightarrow f(2) = 5 \Leftrightarrow 8 + 4a + 2b + c = 5$
- la tangente à (C_f) au point A est de coefficient directeur : 2

$\Leftrightarrow f'(1) = 2 \Leftrightarrow 3 + 2a + b = 2$

D'où : a , b et c sont solution du système : $(S) : \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 4a+2b+c = -3 \\ 2a+b = -1 \end{cases}$

b / $(S) : \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 4a+2b+c = -3 \\ 2a+b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} c+b+a = 0 \\ c+2b+4a = -3 \\ \quad b+2a = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 = L_2 - L_1 \\ L'_3 = L_3 \end{matrix} \begin{cases} c+b+a = 0 \\ \quad b+3a = -3 \\ \quad b+2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L''_3 = L'_3 - L'_2 \end{matrix} \begin{cases} c+b+a = 0 & (1) \\ \quad b+3a = -3 & (2) \\ \quad -a = 2 & (3) \end{cases}$$

D'où : $(3) \to a = -2$; $(2) \to b = 3$; $(1) \to c = -1$

<u>Finalement</u> : Pour tout réel x ; $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

2°/ $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; $\Delta = 16 - 36 = -20 < 0$ **Donc :** le signe de $f'(x)$ est celui de a=3 d'où $f'(x) > 0$ pour tout réel x et par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

f étant une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ f(0) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{l'équation } (E) : f(x) = 0 \text{ admet une seule solution } \alpha \in \left]0, 1\right[$$

FATNASSI BECHIR