Prof : Mr. FATNASSI BECHIR

EXO. (Complexe bac scientifique)

EXO. : (Enoncé)

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,\pi]$.

1°/ a / Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'):z^2+(2\cos\theta).z+1=0$

b / Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.

2°/ a / Déduire les solutions de l'équation $(E'):Z^4+2Z^2\cos\theta+1=0$

b / Montrer que les images M_0,M_1,M_2 et M_3 des solutions de (E') forment un parallélogramme

EXO. : (Solution)

$(E):z^2+(2\cos(\theta))z+1=0$

1°/ a / $\Delta=4\cos^2(\theta)-4=4(\cos^2(\theta)-1)=-4\sin^2(\theta)=(2i\sin(\theta))^2$ **d'où** $\delta=2i\sin(\theta)$

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-2\cos(\theta)-2i\sin(\theta)}{2}=-\cos(\theta)-i\sin(\theta)$$

$$z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-2\cos(\theta)+2i\sin(\theta)}{2}=-\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

b / Forme trigonométriques des solutions :

$z_1=-\cos(\theta)-i\sin(\theta)=\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)$

et $z_1=-\cos(\theta)+i\sin(\theta)=\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)$

2°/ a / $Z^4+2Z^2\cos(\theta)+1=0$ **On pose** $z=Z^2$ l'équation devient : $\begin{cases} z^2+(2\cos(\theta))z+1=0 \\ z=Z^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=z_1 \quad \text{ou} \quad z=z_2 \\ z=Z^2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} Z^2=e^{i(\pi+\theta)} \Leftrightarrow Z=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{ou} \quad Z=e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} \\ \text{ou} \\ Z^2=e^{i(\pi-\theta)} \Leftrightarrow Z=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{ou} \quad Z=e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} \end{cases}$$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}}=\left\{e^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)}\ ;\ e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}\ ;\ e^{i\left(\frac{3\pi-\theta}{2}\right)}\ ;\ e^{i\left(\frac{3\pi+\theta}{2}\right)}\right\}$

b / Soient : $Z_0=e^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)}$ l'affixe de M_0 ; $Z_1=e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}$ l'affixe de M_1

$Z_2=e^{i\left(\frac{3\pi-\theta}{2}\right)}$ l'affixe de M_2 et $Z_3=e^{i\left(\frac{3\pi+\theta}{2}\right)}$ l'affixe de M_3

$$* \text{ On a : aff}\left(\overrightarrow{M_0M_1}\right)=Z_1-Z_0=e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=i\left(2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{aff}\left(\overrightarrow{M_3M_2}\right)=Z_2-Z_3=e^{i\left(\frac{3\pi-\theta}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{3\pi+\theta}{2}\right)}=e^{i\frac{3\pi}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=-i\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

d'où $\text{aff}\left(\overrightarrow{M_0M_1}\right)=\text{aff}\left(\overrightarrow{M_3M_2}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M_1}=\overrightarrow{M_3M_2}\Leftrightarrow M_0M_1M_2M_3$ **est un parallélogramme**