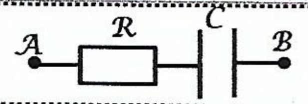
# Bac 2020

## Le dipôle RC



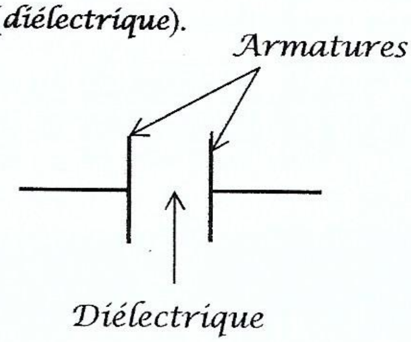

Classe : 4 M- Sc.exp

Mr : Tahar Gabsi

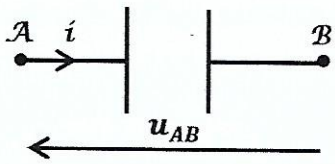
# I- Le condensateur

## 1. Définition et représentation :

- Un condensateur est un dipôle électrique constitué par deux plaques métalliques conductrices appelées ***armatures*** séparées par un isolant (***diélectrique***).
- Il est symbolisé par :



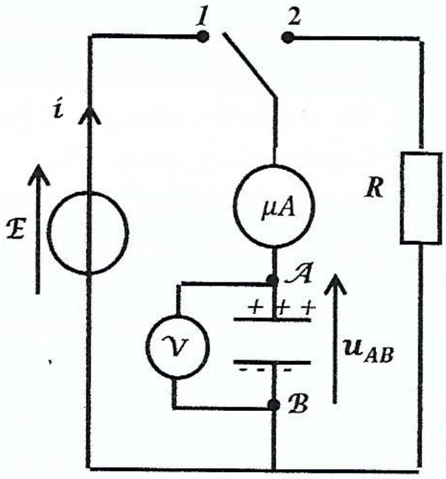

- Les condensateurs sont d'une grande variété de modèles et de forme et sont très utilisés en électroniques.
- Si les armatures du condensateur sont planes et parallèles, le condensateur est alors est ***condensateur plan***.
- Il est préférable de représenter le condensateur en ***convention récepteur***.




## 2. Charge et décharge d'un condensateur

**Q : Comment fonctionne un condensateur ?**

***Montage :***




- ***K en position 1 :***
  - ✓ L'aiguille du microampèremètre dévie puis revient à **0** et le voltmètre indique une tension $u_{AB}$ qui tend vers ~~E~~. E
- ***K en position 2 :***
  - ✓ L'aiguille du microampèremètre dévie dans l'autre sens puis revient à 0 et le voltmètre indique une tension qui tend vers ~~E~~.0

***Interprétation :***

✓ ***K en position 1*** : En raison de l'isolant, les charges électriques libres (les électrons) qui se déplacent dans le reste du circuit ne peuvent traverser le reste du circuit pour aller d'une armature à une autre, un phénomène dit d'influence permet à l'une des armatures d'agir sur l'autre. C'est pourquoi l'autre armature porte la charge $q_B = -q_A = -q$. Le mouvement de ces charges cesse lorsque $u_{AB} = E$, on dit que le *condensateur est chargé.*

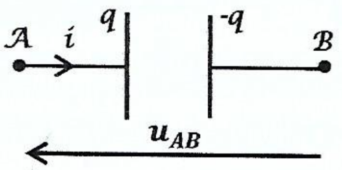
- ✓ ***K en position 2 :*** En absence du générateur dans le circuit les *électrons accumulés* sur l'armature ***B*** lors de la charge du condensateur se déplacent vers l'armature ***A*** par l'intermédiaire des fils de connexions : un courant apparait dans le circuit et la valeur des charges électriques accumulées sur les armatures du condensateur ↘ ⇒ le *condensateur se décharge.*

## 3. Relations fondamentales pour un condensateur.

### a) Relation entre intensité et charge :

- ✓ Pour un *courant variable*, l'intensité instantanée et la charge électrique d'un condensateur sont reliées par la fonction dérivée :

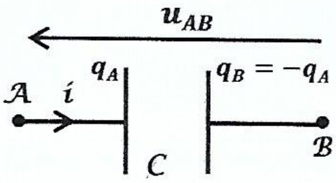
$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt}} \qquad Si \begin{cases} i > 0 \text{ charge du condensateur } q \nearrow \\ i < 0 \text{ décharge du condensateur } q \searrow \end{cases} ; \quad \begin{cases} q \text{ en } C \\ t \text{ en } s \\ i \text{ en } A \end{cases}$$




### b) Relation entre charge et tension : Capacité

- ✓ *La charge électrique* portée par une armature d'un condensateur est *proportionnelle* à la *tension* à ses bornes. Le coefficient de proportionnalité est une caractéristique du composant : c'est la *capacité* du condensateur, noté *C.*

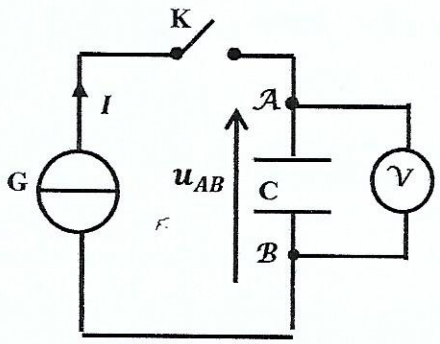
$$\boxed{q_A = C\,u_{AB}} \qquad \begin{cases} q \text{ en } C \\ u_{AB} \text{ en } V \\ C \text{ en farad } (F) \end{cases}$$




- ✓ *C :* est une ***grandeur positive*** qui détermine la << ***capacité***>> du condensateur à ***stocker des charges électriques***. Pour une tension donnée en effet, plus la capacité du condensateur est élevée et plus la charge stockée est importante.
- ✓ Sur le *condensateur* sont indiquées sa *capacité* et une valeur exprimée en ***volts*** qui correspond à sa *tension de claquage*. Soumettre le condensateur à une ***tension supérieure risque de*** le ***détruire***.
- ✓ Pour les ***condensateurs usuels***, les valeurs de capacité sont exprimées en *sous-multiples du farad*: $mF\ (10^{-3}F)$, $\mu F\ (10^{-6}F)$, $nF\ (10^{-9}F)$

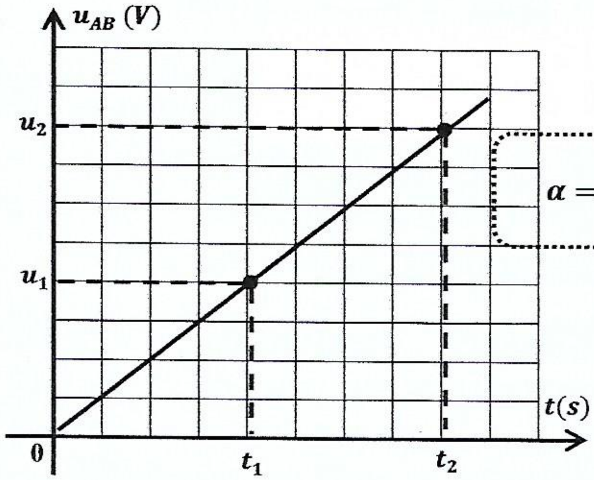
**Q : Déterminer graphiquement la valeur de la capacité C ?**

<u>*Montage :*</u>



## *Mode opératoire :*

- ✓ A $t = 0$ on ***ferme K*** et on prélève à chaque instant la ***tension*** $u_{AB}$ aux bornes du condensateur.
- ✓ On trace $u_{AB} = f(t)$




$$\alpha = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1}$$

***Remarque :***

$i(t) = \frac{dq}{dt} = \mathrm{I} \rightarrow q = It + cte$ ; à $t = 0, q = 0$ (*condensateur non chargé*)

$\Rightarrow \mathbf{cte = 0} \Rightarrow \mathbf{q = It}$

La courbe $u_{AB} = f(t)$ est une droite linéaire d'équation : $u_{AB} = \alpha t$ où $\alpha$ est le coefficient directeur de la droite.

D'autre part $\begin{cases} u_{AB} = \frac{q}{C} \\ q = I\,t \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_{AB} = \frac{I}{C}\,t}$

$$\boxed{u_{AB} = \frac{I}{C}\,t} \quad (1) \qquad \boxed{u_{AB} = \alpha\,t} \quad (2)$$

Par identification de (1) et (2) :

$$\boxed{\alpha = \frac{I}{C} \Rightarrow C = \frac{I}{\alpha}}$$

### *c) Relation entre intensité et tension*

$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt}} \qquad \boxed{q = C\,u}$$

$$\boxed{i(t) = C\,\frac{du}{dt}}$$

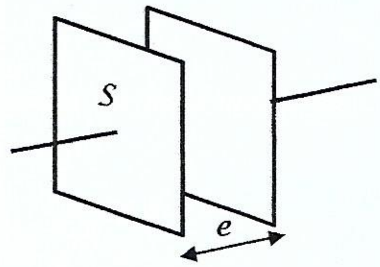
## 4. Energie emmagasinée par un condensateur

❀ Le condensateur est un réservoir *d'énergie électrique* $E_C$ :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C\,u^2 = \frac{1}{2}q\,u}$$

✓ $E_C$ s'exprime en *joule* ($J$)

## 5. Condensateur plan




❀ Un condensateur plan est caractérisé par sa capacité tel que :

$$\boxed{C = \varepsilon\,\frac{S}{e}} \qquad \begin{cases} \varepsilon : \text{permittivité absolue du diélectrique } (F.m^{-1}) \\ S : \text{surface des armatures en regard } (m^2) \\ e : \text{l'écartementdes armatures } (m) \end{cases}$$

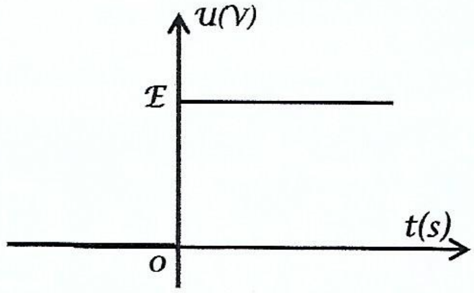
# II- Le dipôle RC

❀ On appelle *dipôle RC* l'association série d'un condensateur de *capacité C* et d'un *conducteur ohmique* de *résistance R*.

Q : *Quelle est la réponse d'un dipôle RC soumis à un échelon de tension ?*

*Echelon de tension :*

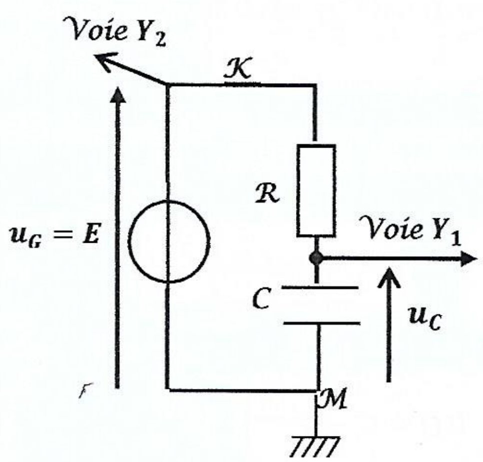
*Un échelon de tension est un signal de la forme* $\begin{cases} u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ u(t) = E \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$




*Remarque* : L'échelon de tension peut être obtenu aux bornes d'un ensemble constitué d'un *générateur de fém.E* et d'un *interrupteur K*. En effet, si $K$ est ouvert, $u = 0$ ; si $K$ est fermé $u = E$ .

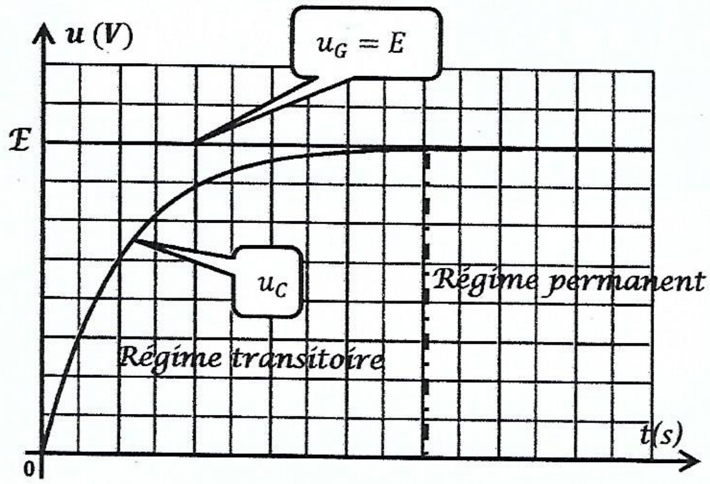
*Montage :*

Q : *indiquer les branchements avec l'oscilloscope qui permettent de visualiser $u_C(t)$ sur la voie $Y_1$ et $u_G(t)$ sur la voie $Y_2$.*



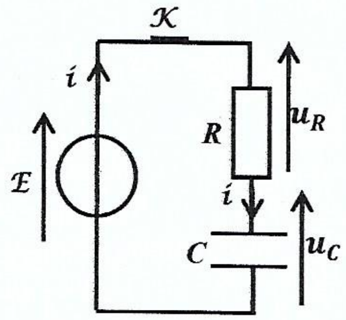
*Conclusion :*

*On appelle réponse du dipôle RC à l'échelon de tension, la tension $u_C(t)$ : c'est un phénomène transitoire.*




*Q : établir l'équation différentielle en $u_C(t)$.*

Schéma :




D'après la loi des mailles : $u_R + u_C - E = 0 \Rightarrow u_R + u_C = E$

$$\begin{cases} u_R = Ri \\ i = C\dfrac{du_C}{dt} \end{cases}$$

$$\boxed{u_R = RC\frac{du_C}{dt}}$$

*L'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_C(t)$, s'écrit :*

$$\boxed{RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E}$$

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}}$$

*Signification du produit RC :*

La dérivée $\dfrac{du_C}{dt}$ est homogène à une tension sur un temps. Il en est donc de même du terme $\dfrac{u_C}{RC}$ qui s'ajoute dans le membre de gauche de l'équation différentielle du circuit. On en déduit que le produit

$\tau = RC$ est homogène à un temps : c'est *la constante de temps du dipôle RC.*

$$\boxed{\tau\frac{du_C}{dt} + u_C = E}$$

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}}$$

Q : la solution générale de l'équation différentielle $\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{\tau}=\frac{E}{\tau}$ est de la forme : $u_C(t)=A\,e^{-\alpha t}+B$ , où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\alpha$ sont des constantes.

✓ Déterminer $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\alpha$ ?

*A savoir :*

*La fonction exponentielle est un opérateur mathématique noté e, (exp) définie comme la fonction reciproque du logarithme népérien tel que :* $Ln(e^x)=x$

$e^0=1$ ; $e^{-\infty}=0$ ;

$y=Ae^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}=-\alpha Ae^{-\alpha t}$

✓ Détermination de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\alpha$ :

- 1ère étape :

Le condensateur est initialement déchargé : $u_C(t=0)=0$

$\Rightarrow A+B=0 \Rightarrow B=-A$ d'où $u_C(t)=Ae^{-\alpha t}-A$

- 2ère étape :

Lorsque $(t\to+\infty)$ ; le condensateur est complètement chargé : $u_C(t\to+\infty)=E$

$Ae^{-\infty}-A=E \Rightarrow A=-E$ d'où $B=E$

- 3ère étape :

$u_C(t)=E(1-e^{-\alpha t})$ ; $\frac{du_C}{dt}=+E\alpha\, e^{-\alpha t}$

En remplaçant dans l'équation différentielle : $E\,e^{-\alpha t}\left(\alpha-\frac{1}{\tau}\right)=0$

$\Rightarrow \quad \forall t>0, \quad \left(\alpha-\frac{1}{\tau}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\alpha=\frac{1}{\tau}\right)=\frac{1}{RC}$

$$\boxed{u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau=RC}$$

Q : En déduire les expressions de $q(t)$, $u_R(t)$ et $i(t)$

- Expression de $q(t)$ :

$q(t)=C\,u_C(t) \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c} q(t)=CE\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau=RC \\ Q_{max}=CE : \text{charge maximale} \end{array}}$$

- **Expression de $u_R(t)$ :**

$$u_R(t) + u_C(t) = E \Rightarrow u_R(t) = E - u_C(t) = E - E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

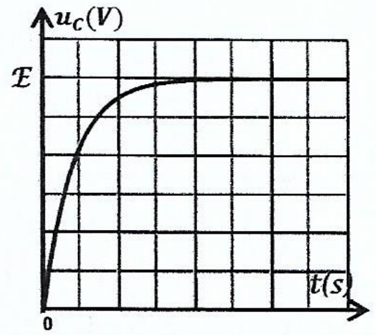
$$\boxed{u_R(t) = E\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

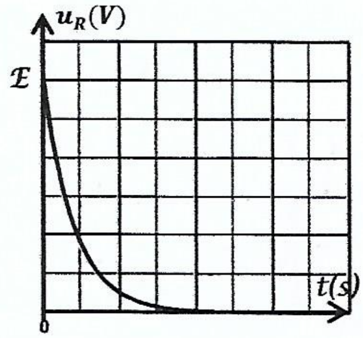
- **Expression de $i(t)$ :**

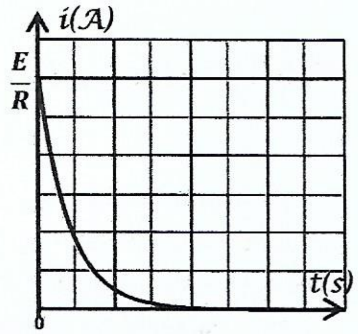
$$u_R(t) = R\, i(t) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{array}{c} i(t) = \dfrac{u_R(t)}{R} = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ I_0 = \dfrac{E}{R} \text{ intensité maximale} \end{array}}$$

*Graphe de $u_C(t), u_R(t)$ et $i(t)$*

| $u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ | $u_R(t) = E\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ | $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ |
|---|---|---|




| $t(s)$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $u_C(V)$ | 0 | E |

| $t(s)$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $u_R(V)$ | E | 0 |

| $t(s)$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $i(A)$ | $E/R$ | 0 |

## *La constante de temps $\tau$*

a) *Définition :*

*La constante de temps $\tau$ est une grandeur caractéristique du dipôle RC, elle nous renseigne sur la rapidité avec laquelle s'effectue la charge ou la décharge d'un condensateur.*

b) *Détermination de la constante de temps $\tau$*

- **Par calcul direct :**

Connaissant les valeurs de $C$ et de $R$ $\Rightarrow$ $\tau = RC$

- **Détermination graphique :**

✓ **$1^{ère}$ métode**

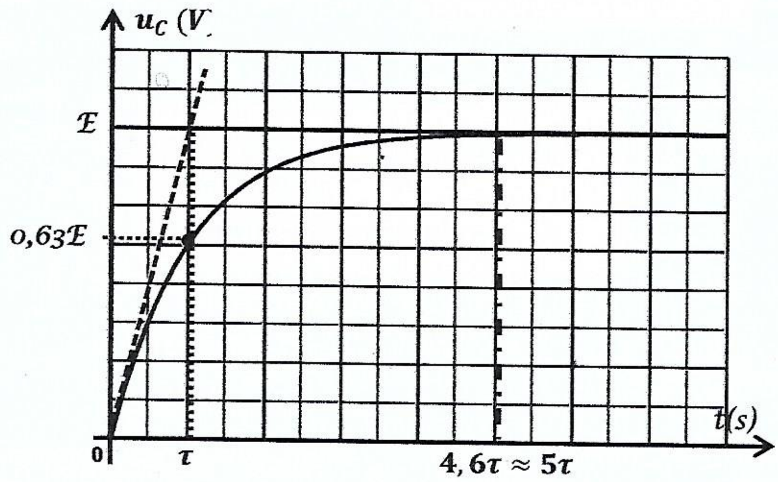
On trace la tangente à la courbe $u_C = f(t)$ au point d'abscisse $t = 0$, l'intersection de cette tangente avec la droite $u_C = E$ donne $t = \tau$

✓ **$2^{ère}$métode**

$u_C(t=\tau) = E(1-e^{-1}) = 0,63\,E$.

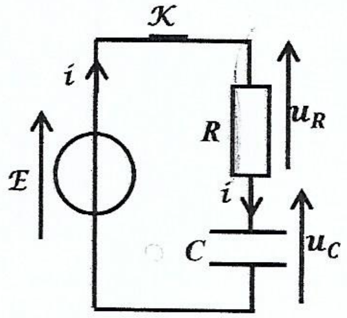
Donc, par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe $u_C = f(t)$ d'ordonnée $0,63E$, on obtient la valeur de $\tau$.

$\tau$ correspond donc au temps nécessaire pour charger un condensateur à $63\%$.




### *Q : établir l'équation différentielle en $u_R(t)$.*

❁ Schéma :




❁ D'après la loi des mailles : $u_R + u_C - E = 0 \Rightarrow u_R + u_C = E$ : (1)

✓ On dérive (1) par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}(u_R + u_C = E) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du_R}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

✓ D'autre part :

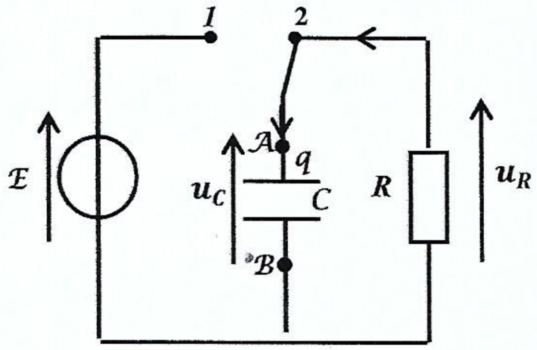
$$u_R = Ri = RC\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{RC}u_R$$

❁ *L'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_R(t)$, s'écrit :*

$$\boxed{\frac{du_R}{dt} + \frac{u_R}{RC} = 0}$$

❁ *Cette équation différentielle admet comme solution :* $\boxed{u_R(t) = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$

### III- Décharge d'un condensateur :

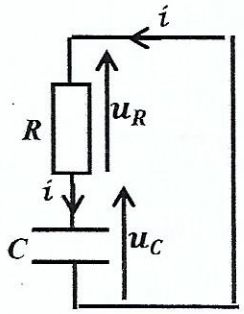



- ✓ On suppose que le condensateur est chargé et que la tension à ses bornes $u_C = E$ au moment où l'on bascule l'interrupteur en position 2. A la date $t = 0$, les bornes du dipole RC sont reliées par un fil, la tension aux bornes du dipôle RC passe brutalement de $E$ à $0$ : le dipôle est soumis à un échelon de tension descendant.

- ✓ En l'absence de générateur dans le circuit, les ***électrons accumulés*** sur ***l'armature négative B*** lors de la charge du condensateur, ***se déplacent*** vers ***l'armature positive A*** par l'intermédiaire des fils de connexion. ***Un courant apparait*** alors dans le circuit, et la valeur des charges électriques accumulées sur les armatures du condensateur diminue : il se ***décharge.***

*Q : établir l'équation différentielle en $u_C(t)$.*

❀ Schéma :




❀ La loi d'additivité des tensions permet d'écrire :

$$u_R + u_C = 0$$

- *Avec l'orientation choisie pour le circuit, on a :*
  - ✓ *Pour le condensateur*

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ et } q = Cu \Rightarrow i = C\frac{du_C}{dt}$$

  - ✓ *Pour le résistor :*

$$u_R = Ri = RC\frac{du_C}{dt}$$

❀ *L'équation différentielle de la tension $u_C$ aux bornes d'un condensateur lors de sa charge dans un résistor est :*

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0}$$

*Avec $\tau = RC$ : constante de temps du circuit (s)*

***Remarque*** : *En utilisant la relation $u_C = q/C$, on obtient l'équation différentielle en $q(t)$ :*

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau}q = 0$$

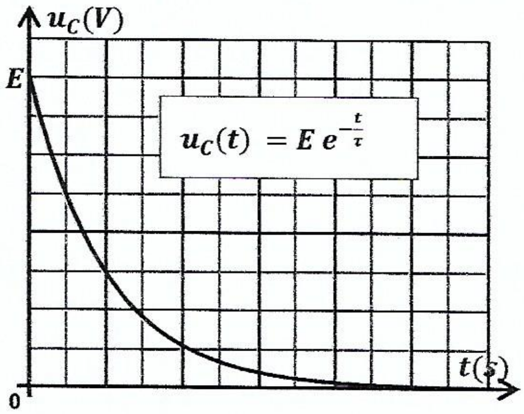
*Q : Montrer que $u_C(t) = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ est une solution de $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = 0$*

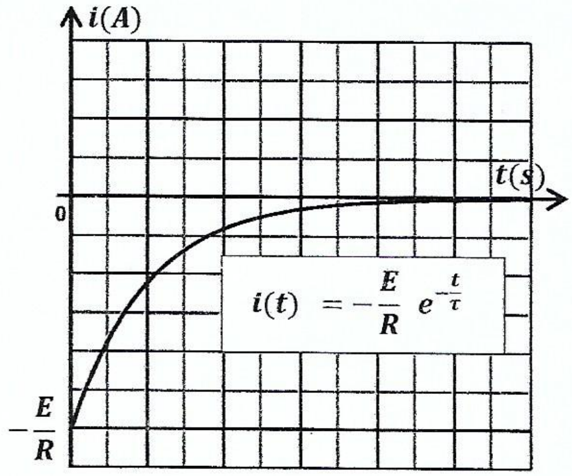
*Avec $\tau$ est une constante à exprimer en fonction de R et C.*

- $u_C(t) = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ , $\dfrac{du_C}{dt} = -\dfrac{E}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

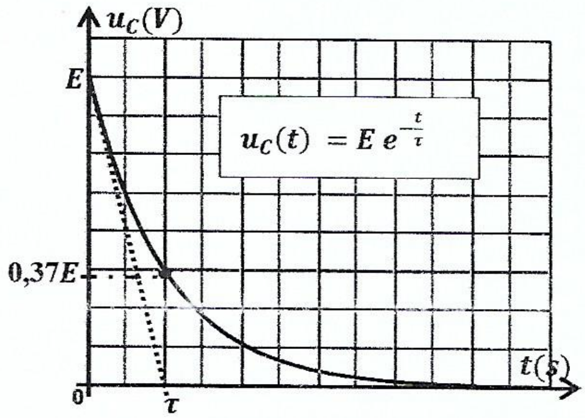
- On remplace $u_C(t)$ et $\dfrac{du_C}{dt}$ dans l'équation différentielle :

$$-\frac{E}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{RC}\,e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad \Rightarrow E\,e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{RC}\right) = 0 \quad \Rightarrow \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{RC}\right) = 0 \quad \Rightarrow \tau = RC$$




### Détermination de la constante de temps $\tau$ :




- ✓ La même méthode de détermination graphique de $\tau$ s'applique à la courbe de décharge. L'intersection de la tangente à la courbe $u_C = f(t)$ à l'origine avec l'axe des abscisses donne $t = \tau$ .
- ✓ En remplaçant $t$ par $\tau$ dans l'expression de $u_C(t)$, on obtient $u_C = Ee^{-1} = 0,37E$.
- ✓ $\tau$ est alors l'abscisse du point de la courbe $u_C(t)$ d'ordonnée $0,37E$.

### Durée du régime transitoire

- ✓ Connaitre la valeur de $\tau$ permet d'apprécier l'ordre de la durée de charge ou de décharge d'un condensateur dans un circuit RC

*Lors de la charge ou de la décharge d'un condensateur dans un Circuit RC de constante de temps $\tau$, le régime transitoire dure environ $5\tau$ .*

### Influence des caractéristiques du circuit :

- ✓ Dans un circuit ***RC***, la ***charge*** ou la ***décharge*** d'un condensateur de capacité ***C*** donnée s'effectue donc de plus en ***plus lentement*** quand ***R*** ↗. Il en est de même lorsque ***C*** ↗ à valeur de ***Rfixe***.