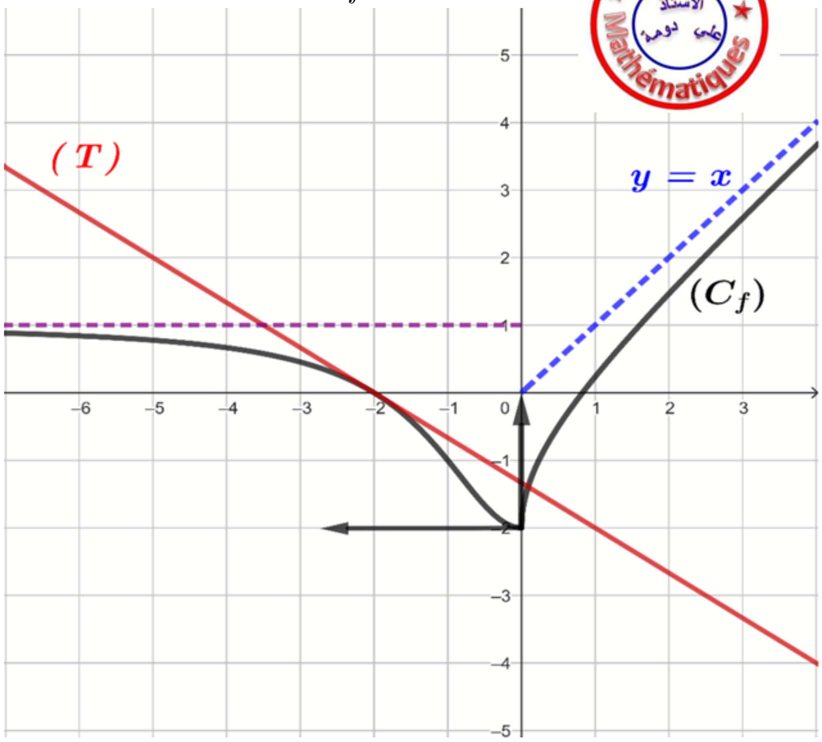
Douma Ali — 3ème Sciences — 01/01/2023

Série N°6

Exercice N° 1

I/ Dans le graphique ci-contre (C_f) , est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Par lecture graphique déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $f(0)$; $f'_d(0)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)+2}{x}\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.
2. La droite (T) passe-t-il par le point $A(18,-\dfrac{40}{3})$?

II/ On suppose dans la suite , la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2+2} & ; \quad Si : x\leqslant 0\\[2mm] \sqrt{x^2+4x}-2 & ; \quad Si : x\geqslant 0\end{cases}$$

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.
2. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]-\infty,0[$.
   b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$.
3. a) Donner l'équation de la tangente de (T_1) à (C_f) au point d'abscisse 1 .
   b) Existe -t-il une tangente à (C_f) parallèle à la droite d'équation $y=x$

Exercice N° 2

Dans chacun des cas suivants , déterminer le domaine de défintion de f et les intervalles sur lesquels f est dérivable puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x)=5x^3-3x^2+7x-1$
2. $f(x)=(x^2-2)\sqrt{x}$
3. $f(x)=\dfrac{3x^2-4x-2}{1-x}$
4. $f(x)=(x^2+4)^4$
5. $f(x)=\dfrac{4}{(3x-2)^3}$
6. $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$
7. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}}$
8. $f(x)=\dfrac{x^3+x+1}{x^2+2x-3}$
9. $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^{-}1}$
10. $f(x)=2\sqrt{x^2+5}-3x$

Exercice N° 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus 1$ par :
$f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$,pour tour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = x + \dfrac{4}{x-1}$.

   b) En déduire que la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

   c) Déterminer la position relative de (Δ) et (C_f).

   d) Construire (Δ) et (C_f)

3. Montrer que le point $I(1, 1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

4. Soit la fonction g définie par $g(x) = f(2 - x)$

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $g(x) = 2 - f(x)$.

   b) Tracer (C_g) à partir de (C_f).

5. On considère la fonction$g$ définie par : $g(x) = a\sqrt{x} + b$ ou a et b sont deux réels données .
   la droite $\Delta' : y = x - 3$ est tangente à (C_g) au point d'abscisse 1.

   a) Déterminer a et b .

   b) Donner une valeur approchée de $g(1,001)$

6. Dans la suite on prend $a = 2$ et $b = -4$.
   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x) = f(x) & ; \text{ si } x \leqslant 0 \\ h(x) = g(x) & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$

   a) Montrer que h est continue en 0.

   b) Étudier la dérivabilité de h à droite et à gauche en 0.

   c) Dresser le tableau de variation de h.

Exercice N° 4

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 + bx + c}{ax - 2}$ avec b et c deux réels et a un réel non nul.
On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que :
   * (C_f) admette la droite $(\Delta) x = 2$ comme asymptote .
   * (C_f) admette la droite en $A(1, -3)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses .
   Dans la suite en prend $a = 1, b = -7$ et $c = 8$.

2. Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x - 2}$ ou α, βet γ sont des réels qu'on déterminera .

   a) Étudier les variations de f .

   b) Préciser les asymptote de (C_f).

c) Montrer que le point $I(2,1)$ est un centre de symétrie de (C_f)

3) Soit le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Écrire une équation de (C_f) selon le repère $R' = (O, \vec{u}, \vec{j})$.

4) Soit l'équation $(E_m) : 2x^2 - (7+m)x + 2m + 8 = 0$ ou $m \in \mathbb{R}$.
discuter suivant m le nombre de solutions de l'équation (E_m)

5) Soit la droite $(\Delta_m) : y = m$. Dans le cas ou (Δ_m) coupe (C_f) en deux points M' et M'' , on suppose K le milieu de $[M'M'']$.

a) Déterminer en fonction de m les coordonnées de K.

b) Déterminer l'ensemble H lorsque m varie .

6) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 3|x-1| + 5}{|x-1| - 1}$.
On désigne par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer le domaine de définition de g.

b) Montrer que la droite $(D) : x = 1$ est un axe de symétrie de (C_g).

c) Déterminer l'expression de $g(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[\setminus \{2\}$.

d) Tracer la courbe (C_g).

Exercice N° 5

I/ Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que la droite $(\Delta) : x = \dfrac{2\pi}{3}$ est un axe de symétrie de (C).

b) Montrer que l'étude de f peut être réduite à l'intervalle $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$.

2) Donner le tableau de variation de f sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$.

3) Tracer la courbe (C') de la restriction de f à $\left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}\right]$.

4) Résoudre dans $\left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}\right]$ l'équation : $f(x) = 2$.

II/ Soit la fonction g définie sur $\left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}\right]$ par : $g(x) = 1 - \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$.

1) Vérifier que $g(x) = f(x + \frac{\pi}{3})$.

2) Tracer (Γ) la courbe de g à partir de (C') .

III/ Soit h la fonction définie sur $\left[\dfrac{-5\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$ par : $h(x) = f(|x| + \frac{\pi}{3})$.

1) Déterminer à partir de (Γ) la courbe de h dans le meme repère .

2) Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \geqslant 2$ dans $\left[\dfrac{-5\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$

Exercice N° 6

I/ Simplifier : $A = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{\sin(6\pi - x)} + \dfrac{\sin(\frac{3\pi}{2}-x)}{\cos(x-\pi)}$ et $B = \sin(\frac{7\pi}{9})\sin(\frac{\pi}{18}) - \cos(\frac{7\pi}{9})\sin(\frac{4\pi}{9})$.

II/ On pose $f(x) = 2\sqrt{2}\ \cos(x - \frac{\pi}{4})\ \sin(2x)$.

1) a) Montrer que : $f(x) = 1 - \cos(2x) + \sin(2x)$.

b) Calculer : $f(\frac{\pi}{12})$. En déduire la valeur de $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) Soit $g(x) = \dfrac{\cos(2x)}{f(x)}$ avec $x \in]0, \pi[$.

a) Vérifier que : $\cos(2x) = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)\cos(x - \frac{\pi}{4})$.

b) Montrer que : $g(x) = \dfrac{1 - \tan x}{2\tan x}$.

c) En déduire $\tan(\frac{\pi}{12})$

Exercice N° 7

1) a) Montrer que pour tout réel x , $\cos(2x) - \sin(2x) + 1 = 2(\cos x - \sin x)$.

b) Montrer que pour tout réel x ,$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$,l'équation : $\cos(2x) - \sin(2x) + 1 = 0$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, $\dfrac{2\cos(2x)}{\cos(2x) - \sin(2x) + 1} = 1 + \tan x$.

b) En déduire $\tan(\frac{\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x$.

Exercice N° 8

1) Soit $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) + 1$.

Calculer : $f(-\frac{\pi}{12})$ et $f(\frac{\pi}{3})$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$.

3) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $f(x) = 1$.

4) Soit la fonction g définie sur $]-\pi, \pi[$ par :$g(x) = \dfrac{\sin(2x + \frac{\pi}{3})}{f(x)}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de g.

b) Montrer que pour tout $x \in D$ on a : $g(x) = \tan(x + \frac{\pi}{6})$.

c) En déduire : $\tan(\frac{\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$