Douma-Ali 27/04/2023

Suites réelles et fonctions trigonométriques

3 ème Sciences

Exercice N°1

Montrer par récurrence

1. Pour tout entier naturel n , $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.
2. Pour tout entier naturel n ,$\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$
3. Pour tout entier naturel n, $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n \geqslant 1 + \dfrac{n}{3}$

Exercice N°2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 7$ et $u_{n+1} = 10u_n - 9$

1. Calculer : u_2, u_3 et u_4
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$; $u_n = 6 \times 10^{n-1} + 1$

Exercice N°3

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}. \end{cases}$

1. a) Calculer u_1 et u_2
   b) Déduire que la suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique .
2. a) Etudier et tracer dans un repère orthonormé la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$
   b) Représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n).
   c) Montrer que pour tout entier n , $u_n \leqslant 2$
3. On suppose que $u_n \neq 1$. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 3 + \dfrac{1}{u_n - 1}$
   a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n
   b) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.
   c) Exprimer (v_n) en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n.
   d) Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$
   e) Calculer n sachant que $S = 30$

Exercice N°4

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5} \end{cases}$.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$

   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

2. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   c. Calculer alors la limite de la suite (u_n).

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique

   b. Exprimer nv_n puis u_n en fonction de n

4. On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$

   a. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}, n \leqslant S_n \leqslant n + 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{S_n}{n}\right)$

Exercice N°5

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1. \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n - 1 \end{cases}$

1. a. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante .

   b. Montrer que la suite (v_n) est croissante .

2. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $x_n = u_n - v_n$

   a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique .

   b. Exprimer w_n en fonction de n.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = -2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Exercice N°6

Soit Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{3 - u_n}. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \ -1 < u_n \leqslant 0$
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + 1 \leqslant \dfrac{2}{3}(u_n + 1)$.
   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n + 1| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
   c. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1 - u_n}{1 + u_n}$
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera sa raison et son premier terme .
   b. Exprimer v_n en fonction de n .En déduire u_n en fonction de n.
   c. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice N°7

I/ Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que la droite $(\Delta) : x = \dfrac{2\pi}{3}$ est un axe de symétrie de (C).
   b. Montrer que l'étude de f peut être réduite à l'intervalle $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$
2. Donner le tableau de variation de f sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$.
3. Tracer la courbe (C') la restriction de f à $\left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}\right]$.
4. Résoudre dans $\left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}\right]$ l'équation $f(x) = 2$

II/ Soit la fonction g définie sur $\left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}\right]$ par $g(x) = 1 - \cos x - \sqrt{3}\sin x$

1. Vérifier que $g(x) = f\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ pour tout $x \in \left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}\right]$.
2. Utiliser la courbe (C') pour tracer la courbe (Γ) de g .

III/ Soit h la fonction définie sur $\left[\dfrac{-5\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$ par $h(x) = f\left(|x| + \dfrac{\pi}{3}\right)$

1. Déterminer à partir de la courbe (Γ) la courbe (Γ') de la fonction h

2. Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \geqslant 2$ dans $\left[\frac{-5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

Exercice N°8

I/ Soit la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = a\cos^3 x + b\cos x + c$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. a, bet c sont trois réels donnés .

1. Déterminer les réels a, bet c sachant que la courbe (C) passe par les points $A(0, 2)$ et $B(\pi, 0)$ et f admet un extrémum en $\frac{\pi}{3}$.
   On suppose dans la suite que pour tout $x \in [0, \pi]\,; f(x) = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$
2. a. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = 3\sin x\,(1 - 2\cos x)\,(1 + 2\cos x)$
   b. Étudier les variation de f sur $[0, \pi]$
3. a. Écrire une équation de la tangente (Δ) à (C) au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
   b. En utilisant le nombre dérivé de f en $\frac{\pi}{2}$, calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f^2(x) - 1}{2x - \pi}$

II/ Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$

1. Calculer $g'(x)$ en fonction de x
2. a. Dresser le tableau de variation de g.
   b. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$

Exercice N°9

On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x$

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$; $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$
2. Résoudre dans $[0, \pi]$, l'équation $f(x) = 0$
3. Calculer $f'(x)$ .En déduire $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) + 1}{x - \frac{\pi}{6}}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} \frac{f(x) - 3}{3x - 2\pi}$.
4. a. Dresser le tableau de variation de f
   b. Déduire le signe de $f(x)$ sur $[0, \pi]$