Douma-Ali 26/04/2023

# Systèmes et vecteurs

1ère Années

## Exercice N°1

On considère les deux équations du premier degré et à deux inconnus :
$(E_1) : 2x - 3y - 2 = 0$ et $(E_2) : -3x + 5y + 2 = 0$

1. a) Vérifier que $(-2, -2)$ est une solution de $(E_1)$ et que $(4, 2)$ est une solution de $(E_2)$.
   b) Déterminer le réel $t$ pour que le couple $(1, t)$ soit une solution de $(E_1)$.
   c) Déterminer le réel $a$ pour que le couple $(a, -1)$ soit une solution de $(E_2)$.
2. a) Représenter dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ représentations graphiques respectives de $(E_1)$ et $(E_2)$.
   b) Déduire graphiquement la solution du système $(S) : \begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ -3x + 5y + 2 = 0. \end{cases}$
3. a) Résoudre par le calcul le système $(S)$.
   b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système $(S') : \begin{cases} 2x^2 - 3|y| - 2 = 0 \\ -3x^2 + 5|y| + 2 = 0. \end{cases}$

## Exercice N°2

1. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x + y = 20 \\ 2x - y = -2. \end{cases}$
2. Sami possède dans sa tirelire 20 pièces de monnaie de 500 millimes et de 1 dinars .Si son père lui donne 6 pièces de 1 dinars et 4 pièces de 500 millimes ; alors le nombre des pièces de 1 dinars sera le double des autres .
   Déterminer le nombre de pièce de chaque type.

## Exercice N°3

1. Trouver une solution pour chacune des équations suivantes :
   $(E_1) : 2x + y = 4$ et $(E_2) : 3x - y = 1$ .
2. a) Représenter dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les droites
   $D_1 : y = -2x + 4$ et $D_2 : y = 3x - 1$ .
   b) Déduire graphiquement l'ensemble de solutions du système $(S) : \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ .
3. Résoudre par le calcul le système $(S)$

## Exercice N°4

1. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x + 2y = 165 \\ 3x + y = 195 \end{cases}$ .
2. Dans une salle de bains , un néon et deux lampes consomment 165 Watts .
   Dans une cuisine , six néons et deux lampes consomment 390 Watts.

Quelle est la consommation ,en Watts , d'un néon ? Quelle est celle d'une lampe ?

## Exercice N° 5

Soit $ABC$ un triangle .

1. a) Construire les points $I$ et $J$ tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BJ}$
   b) Montrer que $J$ est l'image de $A$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.
2. a) Construire le point $M$ tel que $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.
   b) Montrer que les points $A, M$ et $C$ sont alignés .
3. Soit $K$ le point tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
   a) Exprime $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.
   b) En déduire que les deux vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.
4. Soient $(\varphi)$ le cercle de centre $B$ et passant par $A$ et $(\Delta)$ la tangente à $(\varphi)$ en $A$.
   a) Déterminer et construire $(\Delta')$ et $(\varphi')$ les images respectives de $(\Delta)$ et $(\varphi)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.
   b) Montrer que $(\Delta')$ est tangente à $(\varphi')$.
   c) La droite $(AB)$ recoupe $(\varphi)$ en $G$ et la droite $(IJ)$ recoupe $(\varphi')$ en $H$.
   Montrer que $H$ est l'image de $G$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$

## Exercice N°6

Soit $ABC$ un triangle et $I$ le milieu de $[BC]$ .

1. Construire les points $E$ et $F$ tels que $\overrightarrow{AE = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ et $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
2. Les droites $(BE)$ et $(CF)$ se coupent en un point $O$.
   a) Montrer que $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.
   b) Montrer que $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0}$
3. a) Construire le point $G$ tel que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EO}$.
   b) Montrer que $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{IG}$
4. Les droites $(EG)$ et $(OF)$ se coupent en $H$ .
   Montrer que $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$.
5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires .
6. a) Déterminer les images des points $I$ et $O$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
   b) Déduire que les triangles $OEI$ et $GFC$ ont la même aire .

## Exercice N°7

Soit $ABCD$ un parallélogramme .

1. a. Construire les points $E$ et $F$ tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires
2. a. Construire le point $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$
   b. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   c. En déduire que les points $B, M$ et $F$ sont alignés .
3. a. Construire le point $I$ tel que $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.
   b. Montrer que $A$ est le milieu de $[IB]$ .
4. a. Construire le point $J$ tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires .
   c. Montrer que les droites $(IJ)$ et $(AC)$ sont parallèles

## Exercice N°8

On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre $O$.

1. a. Montrer que : $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$.
   b. En déduire que : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. a. Construire le point $K$ définie par : $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$.
   b. Montrer que $ADKO$ est un parallélogramme .
3. Montrer que : $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
4. Soit le point $E$ tel que $ABEK$ est un parallélogramme .
   Montrer que les points $A, C$ et $E$ sont alignés et que $C$ est le milieu $[OE]$.
5. On menu le plan du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ .
   Déterminer les coordonnées des points $O, E$ et $K$.

## Exercice N°9

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ . On donne les points $A(1,2), B(2,4)$ et $C(3,1)$

1. a. Calculer $AB, BC$ et $AC$
   b. En déduire la nature du triangle $ABC$
2. Déterminer les coordonnées du point $E$ centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$ et calculer son rayon .
3. Calculer les coordonnées du point $D$ tel que $ABCD$ est un parallélogramme.