Lycees : Echebbi Gabès et Cité Elamal Gabes ❖❖❖ Devoir de synthèse N°2 ❖❖❖ **Enseignants : Mhemdi Ayadi – Marzoug Adel**	**Classe: 3^{eme} Math** **Epreuve : MATHEMATIQUES** **Durée : 3h** **Date : 14 – 03– 2023**

Exercice N°1 (4,5 points)

Les questions I, II et III sont indépendantes.

I/ Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On pose $A = n-1$ et $B = 5n^3 + 7n$

1. Développer : $(n-1)(5n^2+5n+12)$
2. En déduire que $B \wedge A = A \wedge 12$
3. Quelles sont les valeurs possibles de $A \wedge B$?
4. Pour quelles valeurs de n, le nombre $F = \dfrac{5n^2+7n}{n-1}$ est – il un entier naturel ?

II/ Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système $\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ a \vee b = 150 \\ a < b \end{cases}$

III/ p et n sont deux entiers naturels non nuls

1. Montrer que p^2 divise $(p+1)^n - pn - 1$ (ind : on peut raisonner par récurrence sur n)
2. En déduire le reste de la division euclidienne de 4^{2023} par 9

Exercice N°2 (4points)

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher, réparties comme suit :

Quatre blanches numérotées : 0, 0, 1, 2 et **trois** rouges numérotées : 1, 1, 1

1. On tire au hasard et **simultanément** **<u>trois boules</u>** de l'urne.
   Dénombrer chacun des résultats suivants :
   A « Obtenir trois boules de même couleur »
   B « Obtenir trois boules portant le même numéro »
   C « Obtenir trois boules portant le même numéro et de même couleur »
   D « Obtenir trois boules portant le même numéro ou de même couleur »
   E « Obtenir au moins une boule blanche »
2. On tire au hasard **successivement et sans remise** **<u>quatre boules</u>** de l'urne.
   Dénombrer chacun des résultats suivants :
   F « Obtenir deux boules blanches et deux boules rouges »
   G « La somme des numéros marqués sur les boules est égale à 5 »
   H « Obtenir une boule numéro 0 pour la première fois au troisième tirage »

Exercice N°3 (4,5points)

A / On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x}{2+x}$

1. a – Dresser le tableau de variation de f

b – En déduire que pour tout réel $x \in [1,3[$ on a $f(x) \in [1,3[$

2. Montrer que pour tout réel $x \in [1,3[$ on a $0 < 3 - f(x) \leq \frac{2}{3}(3-x)$
3. Etudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \geq 0$

B/ Soit la suite U définie sur IN par : $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n) = \dfrac{5U_n}{2+U_n}$

1. On donne la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (<u>feuille annexe</u>)

   Placer les quatre premiers termes de la suite U sur l'axe des abscisses.
2. a – Montrer que pour tout entier naturel n on a : $1 \leq U_n < 3$

   b – Montrer que la suite U est croissante

   c – On admet que U est convergente, calculer sa limite L
3. On se propose de retrouver la limite de la suite U

   a – Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < 3 - U_{n+1} \leq \frac{2}{3}(3 - U_n)$

   b – En déduire que pour tout entier naturel n on a : $0 < 3 - U_n \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

   c – Retrouver alors la limite de la suite U

Exercice N° 4 *(7 points)*

A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x+2}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2. a – Vérifier que pour tout réel $x \neq (-2)$ on a : $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+2}$

   b – En déduire que la courbe de f admet deux asymptotes dont on précisera les équations

   c – Montrer que le point $I(-2,-3)$ est un centre de symétrie de la courbe de f
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Compléter la courbe de f ainsi que ses asymptotes (<u>feuille annexe</u>)

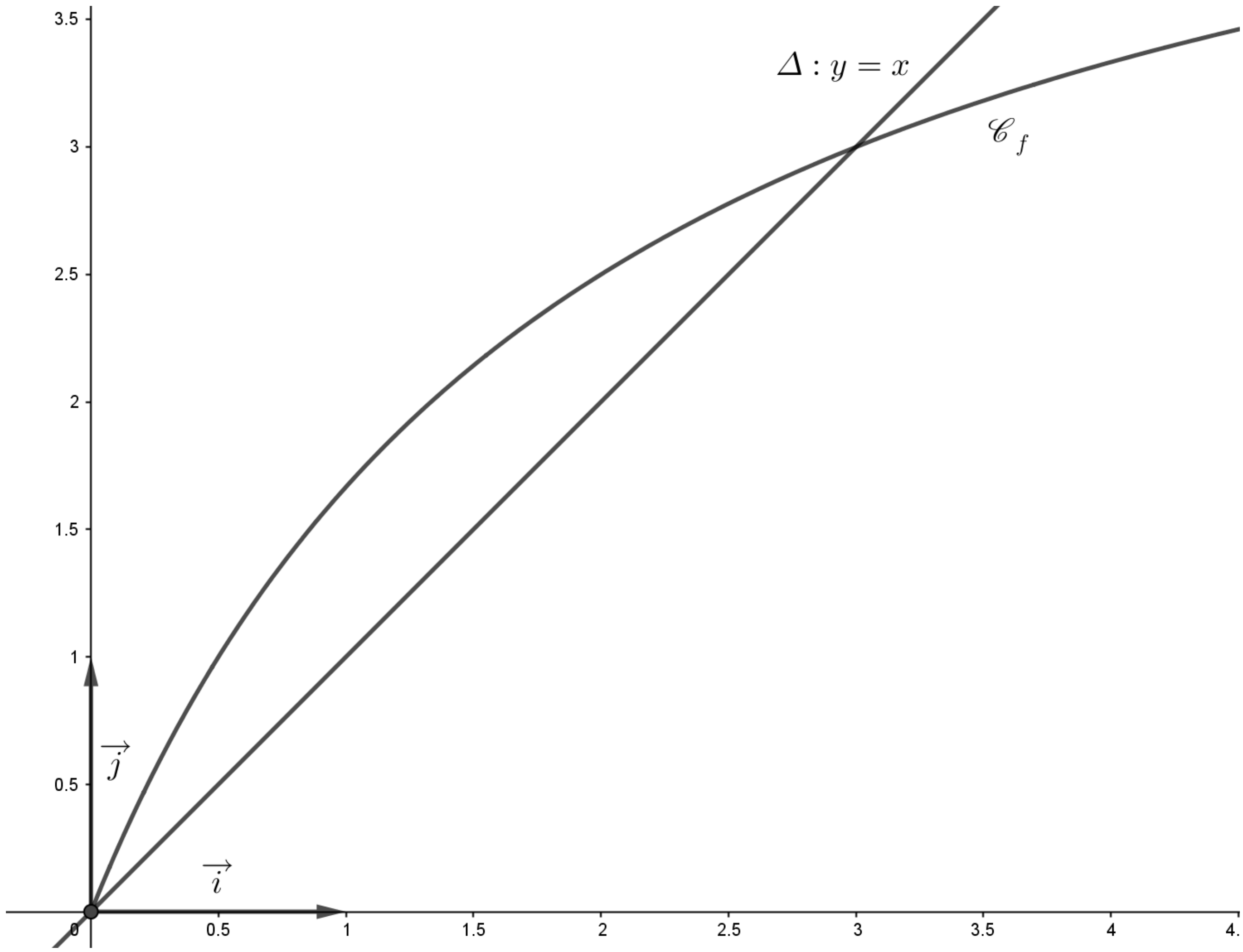
B/ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x+2} & si\ x < -2 \\ g(x) = |f(x)| & si\ x > -2 \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout réel $x < -2$ on a : $g(x) = f(x) + 3$
2. Tracer alors la courbe $\mathscr{C}_g$ de g dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f
3. En utilisant le graphique, dresser le tableau de variation de g

Feuille annexe à rendre avec la copie

Nom et Prénom……………………………………………………………..

Exercice N° 3



Exercice N°4