LYCEES : BROURMET & GHRAIBA PROFS: SOLTANI M. & LAKHRAM F. DOUMA A. & MABROUK A.	DEVOIR DE SYNTHÈSE # 2	
	Épreuve : **Mathématiques**	3 ème **Sc Exp.**
	Durée : **2 h**	A.SC : 2021-2022

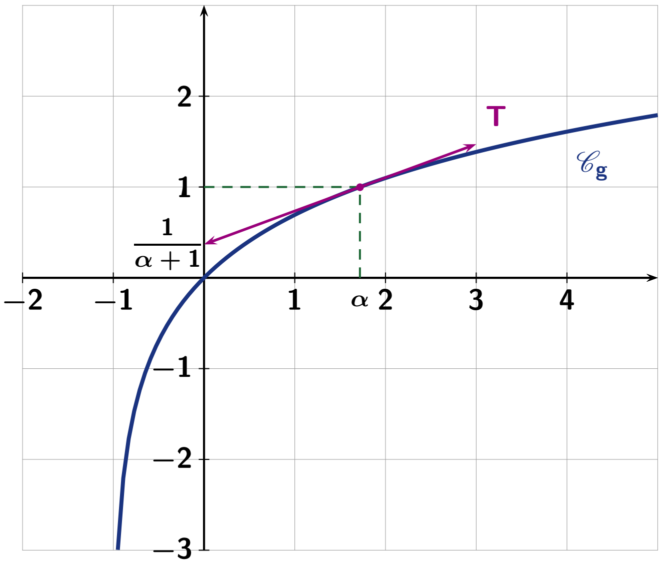
Le sujet comporte **3** pages numérotés de **1** à **3**.

~ Exercice ~ 1.

4 Pts

Soit $\mathbf{f}$ une fonction définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$. On note $\mathbf{g}$ sa fonction dérivée.

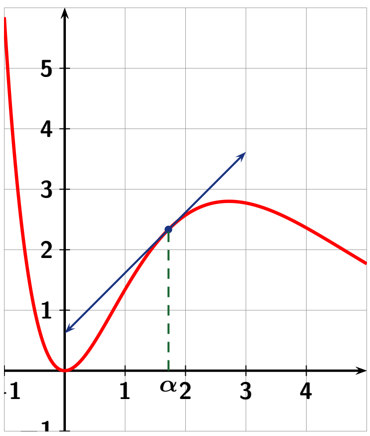
- La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction $\mathbf{g}$ sur $]-1;+\infty[$.
- $\mathbf{T}$ est la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_g)$ au point $\mathbf{A}(\alpha, 1)$.
- la droite $x=-1$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_g)$.
- La courbe $(\mathscr{C}_g)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique infinie de direction celle de l'axe des abscisses.



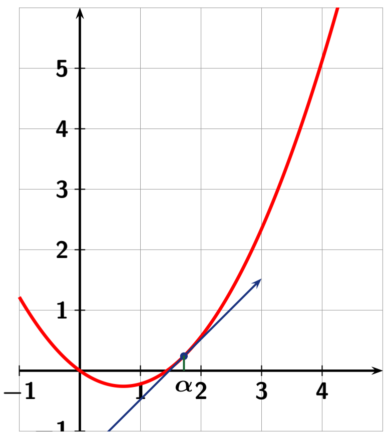
Par lecture graphique et à l'aide des renseignements fournis :

1. Déterminer : $g(0)$; $g'(\alpha)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction $\mathbf{g}$.
3. Donner le sens de variations de $\mathbf{f}$ sur $]-1;+\infty[$.
4. Une des trois courbes représentées ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $\mathbf{f}$.

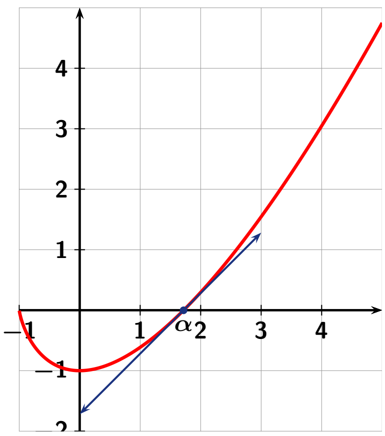
Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$



   (a) Laquelle de ces trois courbes peut convenir ?

   (b) La courbe de $\mathbf{f}$ admet au point d'abscisse α une tangente de coefficient directeur $\mathbf{m}$. Quelle est la valeur de $\mathbf{m}$? ■

~ Exercice ~ 2.

5 Pts

1. Montrer que pour tout réel x on a :

   */ $1 - \cos(x) + \cos(2x) = \left(2\cos(x) - 1\right).\cos(x)$

   */ $-\sin(x) + \sin(2x) = \left(2\cos(x) - 1\right).\sin(x)$

2. Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, On donne les points :

$$M(\cos x, \sin x); N(1 - \cos x, -\sin x) \text{ et } P(\cos(2x), \sin(2x)) \text{ ou } x \in \mathbb{R}$$

   Soit le point Q définis par : $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

   (a) Montrer que O, Q et M sont alignés. (on pourra chercher une relation entre $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OM}$).

   (b) Montrer que $OQ = 2 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}$.

   (c) Déterminer alors l'ensemble des réels x tels que $OQ = 2$.

   (d) Déterminer puis construire l'ensemble des points M tel que $OQ \geq 2$. ■

~ Exercice ~ 3.

5 Pts

Une boite contient dix exercices de mathématiques répartis comme suit :

- 5 exercices d'analyse ;
- 3 exercices de géométrie;
- 2 exercices de probabilités;

Chaque exercice étant mis dans une enveloppe .

Un candidat est invité à tirer au hasard et simultanément trois enveloppes de la boite.

On note :

- **A :** " Obtenir trois exercices de même thème ".
- **B :** " Obtenir trois exercices de trois thèmes différents ".
- **C :** " Obtenir au moins un exercice de probabilité ".
- **D :** " Obtenir trois exercices de deux thèmes différents ".

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer : card(A) ; card(B) et card(C).
3. Montrer que : card $(D) = 79$.
4. (a) Définir l'ensemble : "$C \cap D$" puis déterminer son cardinal.

   (b) En déduire que card$(C \cup D) = 109$. ■

~ Exercice ~ 4.

6 Pts

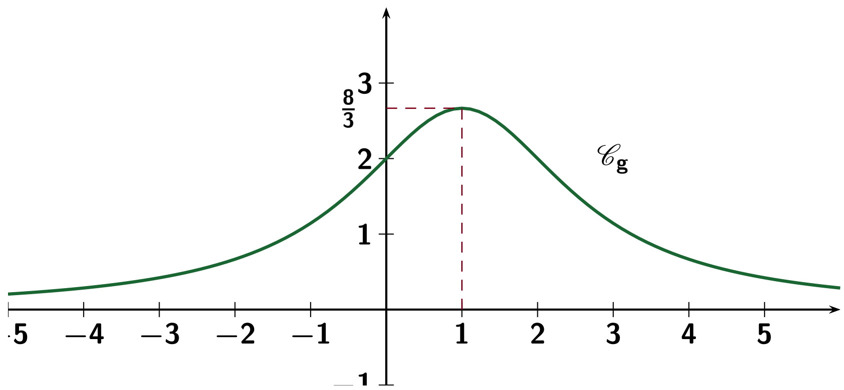
A/ Dans la figure ci jointe , on donne :

- La courbe $(\mathscr{C}_g)$ est la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{8}{x^2 - 2x + 4}$$

.

- la droite $y = 0$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_g)$ au voisinage de ∞.
- le point de coordonnées $(1, \frac{8}{3})$ est un point de $(\mathscr{C}_g)$.



1. Montrer que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$
2. A l'aide du graphique donner le tableau de variations de g.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 4}$ et on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = x + 2 - g(x)$.
   (b) Déduire que $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique Δ que l'on précisera une équation cartésienne.
   (c) Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ et Δ .
2. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 4x + 12)}{(x^2 - 2x + 4)^2}$
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Écrire une équation cartésienne de la tangente T à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
5. Tracer Δ , T puis $(\mathscr{C}_f)$
6. Soient M et N deux points de même abscisse x situés respectivement sur $(\mathscr{C}_f)$ et Δ.
   Déterminer la valeur maximale de MN. ■