L. s. Abou El Kassem Chebbi Miez El beb	*Mathématiques* **Devoir de Contrôle n ° 2**	Classe : **4 T** 5 Prof : **OTHMANI Abdallah**

Date : 17 / 02 /2023 * Durée : 2 h * Coefficient : 3

Exercice n ° 1: (03 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. 4×0.75

1) Le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)$ est :

a) $]-2;2[$ b) $]2;+\infty[$ c) $R/\{2\}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^{2023}}+2023$ est égale:

a) 0 b) $+\infty$ c) 2023

3) Une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ est:

a) $G(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)$ b) $G(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+2\right)^2+1$ c) $G(x)=\ln\left(x^2+2\right)$

4) Les deux droites $\Delta:\begin{cases}x=1\\y=1+4\alpha\\z=1-2\alpha\end{cases}$ et $\Delta':\begin{cases}x=-4\\y=-2\beta\\z=4+\beta\end{cases}$ sont:

a) Sécantes b) non coplanaires c) Strictement parallèles

Exercice n ° 2: (03 points)

Soit la fonction f définie sur $D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ par : $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) a) Montrer que $f(x).f(-x)=-1$ et déduire que $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in D_f$ 0.5

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 0.5

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 0.5

3) a) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$ 0.5

b) Dresser le tableau de variation de f 0.5

4) Montrer que la droite $\Delta: y=2x$ est une asymptote à ζ_f au $V(+\infty)$ 0.5

Exercice n ° 3: (07 points)

L'espace est munie d'un repère direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ On considère les points $A(1,1,1)$; $B(0,2,-1)$, $C(-1,0,0)$

Et soit le plan $(P'): x+2y+z+2=0$

1) a) Montrer que $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=-3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ 0.75

   b) Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan (P) d'équation $(P): x-y-z+1=0$ 0.5

2) Calculer l'aire du triangle ABC 0.5

3) Soit le point $E(1,0,-3)$

   a) Vérifier que les points A, B, C et E sont non coplanaires 0.5

   b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE et déduire la distance du point E au plan (P) 0.75

   c) Monter que les deux plans (P) et (P') sont sécantes en une droite Δ dont on déterminera une représentation paramétrique 0.75

4) On considère $S=\{M(x,y,z)/x^2+y^2+z^2+2x-4y+8z+17=0\}$

   a) Montrer que S est une sphère de centre $I(-1,2,-4)$ et de rayon R à déterminer 0.75

   b) Etudier la position de S et P et préciser $S\cap P$ 0.75

5) a) Soit le point $D(-1,0,-4)$. Vérifier que D appartient à S 0.25

   b) Ecrie une équation cartésienne du plan (Q) tangent à S en D 0.5

6) a) Ecrire une équation paramétrique de la droite Δ' passant par $F(1,2,-4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=2\vec{i}+2\vec{j}$ 0.5

   b) Montrer que la droite Δ' et S sont sécantes en deux points et déterminer leurs coordonnées 0.5

Exercice n ° 4: (07 points)

1) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=2x-2-2\ln x$

   a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{2x-2}{x}$ 0.5

   b) Dresser le tableau de variation de g 0.5

   c) Déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g(x)\geq 0$ 0.25

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=x^2-2x\ln(x)..si..x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On note (ξ) sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

a) Justifier que f est continue à droite en 0 0.25

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat 0.5

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Interpréter graphiquement ce résultat 0.75

3) **a)** Montrer que pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$ on a $f'(x) = g(x)$ 0.5

b) Dresser le tableau de variation de f 0.5

c) Montrer que le point $A(1,1)$ est un point d'inflexion pour la courbe (ξ)

et écrire une équation cartésienne de la tangente T à (ξ) au point A 0.75

4) **a)** Montrer que f est une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur J à préciser 0.5

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0 puis la dérivabilité en

et interpréter graphiquement ces résultat 1

5) Tracer (ξ) la coure de f et (ξ') la courbe de f^{-1} 1