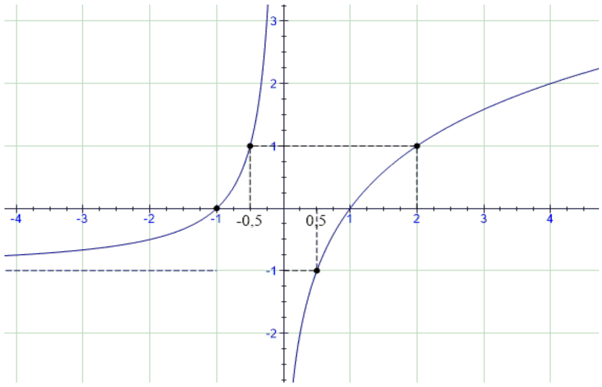
Prof	Mechmeche Imed	Devoir de contrôle N°1	Matière	Maths
Lycée	Nabheni		Date	27/10/2022
Niveau	$4^{ème}$ Maths		Durée	2 h

Devoir de contrôle N°1

Exercice 1 : (7 pts)



La courbe ci-contre, est celle d'une fonction f définie est continue en tout réel $x \neq 0$.

Les droites : $y = -1$ et $x = 0$ sont des asymptotes à C_f.

C_f , admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$. On donne le tableau de variation de g

x	-1		0		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

1) Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f\left(\frac{-1}{x}\right)+1},\ \lim_{x\to 0^+} x\,f\left(\frac{1}{x}\right),\ \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{-x}{f(x)}\right)$$

2) a) Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$.

   b) Soit h la restriction de $g \circ f$ à l'intervalle $I =]-\infty, -1]$. Montrer que h est continue et strictement décroissante sur I

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]-\infty, -1]$ tel que $h(u_n) = 1 - \frac{1}{2n}$

   d) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   e) Montrer que $\lim u_n = -\infty$

3) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} x.f\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right) & si \quad x > 0 \\ f(-x+1) & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

   a) Montrer que φ est continue en 0.

   b) Etudier les branches infinies de la courbe de φ.

Exercice 2 : (6 pts)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit f l'application du plan dans le plan, qui à tout point $M(z \neq 0)$ associe le point $M'(z')$ tel que

$$z' = \frac{z\,\bar{z} - z^2}{2\,\bar{z}}$$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2) Déterminer l'ensemble des antécédents du point O par f.
3) Soit M un point du plan n'appartenant pas aux axes du repère, et H son projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{v})$. On note C_H le cercle de centre O et de rayon OH

   a) Montrer que $M' \in C_H$. (Remarquer que $OH = |Im(z)|$)

b) Vérifier que $\frac{z'-z}{z'}$ est un imaginaire pur.

c) En déduire que la droite (MM') est tangente à C_H en M'

d) Expliquer alors la construction de M' à partir du point M.

4) On considère un point $M'\left(z' = e^{i\alpha}\right)$, où α est un réel de l'intervalle $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

a) Construire les antécédents M_1 et M_2 du point $M'(z' = e^{i\alpha})$.

b) Soit Δ_α la perpendiculaire à (OM') en M'. Montrer qu'une équation cartésienne de Δ_α est :

$y = \frac{-1}{\tan\alpha}x + \frac{1}{\sin\alpha}$

c) Montrer alors que les affixes des antécédents du point $M'(z' = e^{i\alpha})$ sont :

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} + i \quad \text{et} \quad \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} - i$$

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : \left(\frac{z\,\bar{z} - z^2}{2\,\bar{z}}\right)^3 = 1$$

Exercice 3 : (7 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,\sqrt{3}]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{3-x^2}{2}}$.

On admet que f est strictement décroissante sur $[0,\sqrt{3}]$ et que pour tout $x \in [0,\sqrt{3}]$ on a $f \circ f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{3-u_n^2}{2}}$

1) a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$ *et* $w_n = u_{2n+1}$.

a) Montrer par récurrence que la suite v est croissante. (Remarquer que $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$).

b) En déduire que la suite v est convergente, puis calculer sa limite

c) Montrer que la suite w est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.

d) Calculer la limite de la suite w, puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3}|u_n - 1|$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) Retrouver alors la limite de la suite u.

4) On pose $t_n = u_n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que t est une suite géométrique.

b) calculer t_n puis u_n en fonction de n.

c) Retrouver alors la limite de la suite u.