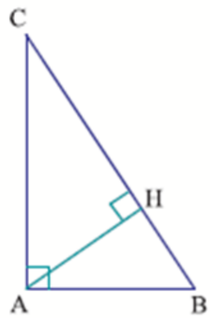
Chapitre 1 Produit scalaire dans le plan

Exercice 1

On considère un triangle ABC rectangle en A et on désigne par H le pied de la hauteur issue de A.

1. Vérifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH^2 - HB.HC$.
2. En déduire que $AH^2 = HB.HC$.



Définition

Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On désigne par A et B les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$, le réel ainsi défini
- $\vec{u}.\vec{v} = OA.OB.\cos \widehat{AOB}$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Définition

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Conséquence

Deux droites sont perpendiculaires, si et seulement si, le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Exercice 2

Soit un triangle ABC.

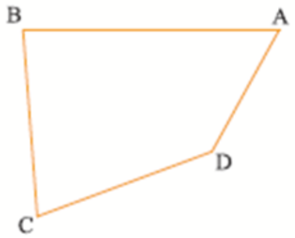
1. Montrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = BC^2$.
2. En déduire que $BC = AB\cos\widehat{B} + AC\cos\widehat{C}$.

Conséquence

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Exercice 3

On considère un quadrilatère ABCD.



1. a. Montrer que $AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{AC} . (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$.

b. Montrer que $DC^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC} . (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD})$.

2. En déduire que $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{DB}$.

Exercice 4

Soit un triangle ABC rectangle et isocèle en A.
On désigne par M et N deux points du plan tels que
$\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AC}$.
On désigne par I le milieu du segment [BN].

1. Vérifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$.
2. a. Montrer que $\overrightarrow{AI} . \overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}(AB^2 - AC^2)$.
b. En déduire que la droite (AI) porte une hauteur du triangle AMC.

Propriété

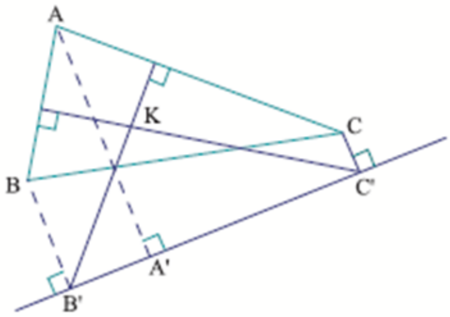
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels α et β,
$(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$, $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$, $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$.

MR : Aymen Salhi
tel: 53080851

Exercice 5

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, A', B' et C' sont les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur la droite Δ.



On désigne par K le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par B' et la perpendiculaire à (AB) passant par C'.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{A'K} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'A'}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{A'K} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

2. En déduire que les droites (A'K) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A(-2, 2), B(4, 0) et C(-1, 2).

1. a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée en radians à l'unité près de $\widehat{BAC}$.

2. Déterminer une valeur approchée en radians à l'unité près de chacun des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B des points tels $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AO), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.

MR : Aymen Salhi
tel: 53080851
Fb: Etude math-chbedda

Corrigé

Exercice 1

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \underbrace{=}_{\text{relation de Chsles}} (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$

or on a : $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{HB}$ d'où

: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + 0 + 0 + HB\times HC\times\cos(B\widehat{H}C)$

comme $\cos(B\widehat{H}C)=\cos\pi=-1$, on aura : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AH^2 - HB\times HC$

2) On a : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0=AH^2-HB\times HC$ ce qui donne $\boxed{AH^2=HB\times HC}$

Exercice 2

1)

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BC}\|^2$$

ainsi on a :$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = BC^2$

2) On a :$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = BC^2 \Rightarrow BA\times BC\times\cos(A\widehat{B}C)+CA\times CB\times\cos(A\widehat{C}B) = BC\times BC$

$$\Rightarrow \boxed{BA\times\cos\widehat{B}+CA.\cos\widehat{C}=BC}$$

Exercice 3

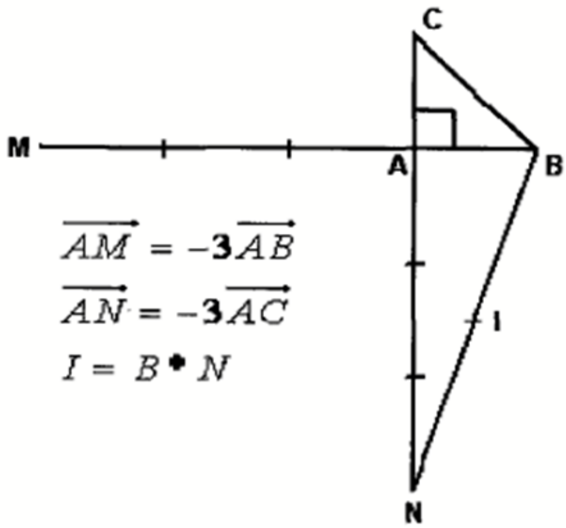
1) a) $AB^2-BC^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$

b) $DC^2-AD^2 = (\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD})$

2)
$$\begin{aligned}
AB^2+DC^2-BC^2-AD^2 &= (AB^2-BC^2)+(DC^2-AD^2)\\
&= \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD})\\
&= \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD})\\
&= \overrightarrow{AC}\cdot\left[(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC})\right]\\
&= \overrightarrow{AC}\cdot\left[(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})\right]\\
&= \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AC}\cdot(2\overrightarrow{DB}) = 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}
\end{aligned}$$

MR : Aymen Salhi
tel: 53080851
Fb: Etude math-chbedda

Exercice 4



1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN}\right)$

$= 2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IN}}_{\vec{0}}$

$= 2\overrightarrow{AI} + \vec{0}$

car I est le milieu de $[BN]$

d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$

2) a) On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}\right)$

Par suite: $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}\right) \bullet \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right) \bullet \left(-\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} - 3AB^2 + 9\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + 3AC^2\right)$

Et comme $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$ car $(AB) \perp (AC)$ on aura :

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(-3AB^2 + 3AC^2\right)$ d'où $\boxed{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}\left(AB^2 - AC^2\right)}$

b) $AB = AC \Rightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}\left(\underbrace{AB^2 - AC^2}_{0}\right) = 0$

D'où (AI) et (CM) sont perpendiculaires et par suite (AI) porte la hauteur issue de A dans le triangle AMC

Exercice 5

1) a) $\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'K}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'K}\bullet\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{BA}+0\ (car\ \overrightarrow{C'K}\perp\overrightarrow{BA})$

$=\overrightarrow{A'C'}\bullet\left(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'A}\right)=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{A'A}$

$=0+\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}+0=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}$

b) $\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'K}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{B'K}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AC}+0$

$=\overrightarrow{A'B'}\bullet\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'C}\right)=\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{C'C}$

$=0+\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}+0=\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}$

2) $\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'K}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{AC'}\bullet\overrightarrow{A'B'}$

$=\overrightarrow{A'C'}\bullet\left(\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'B'}\right)=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'B'}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\vec{0}=0$

d'où $(A'K)\perp(BC)$

Exercice 6

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\oplus$ $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=6\times1+(-2)\times0=6$

$\oplus$ $AB=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ $\oplus$ $AC=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1$

b) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(B\widehat{A}C)$ $d'où$ $\cos(B\widehat{A}C)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{6}{2\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

à l'aide de la calculatrice : $B\widehat{A}C\simeq touche(Endf)+touche[\cos]+(\dfrac{3}{\sqrt{10}})=\cos^{-1}(\dfrac{3}{\sqrt{10}})\simeq(18,435)°\simeq\dfrac{\pi}{10}$

2) * $\oplus$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ $\oplus$ $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=(-6)\times(-5)+2\times2=34$

$\oplus$ $BA=2\sqrt{10}$ $\oplus$ $BC=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$ et $\cos(A\widehat{B}C)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\dfrac{17}{\sqrt{290}}$

à l'aide de la calculatrice : $A\widehat{B}C\simeq\cos^{-1}(\dfrac{17}{\sqrt{290}})\simeq3,37°$

(**) $\oplus$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ $\oplus$ $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=-5$ $\oplus$ $CA=1$ $\oplus$ $CB=\sqrt{29}$

$\Rightarrow$ $\cos(A\widehat{C}B)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\dfrac{-5}{\sqrt{29}}$ à l'aide de la calculatrice : $A\widehat{B}C\simeq\cos^{-1}(\dfrac{-5}{\sqrt{29}})\simeq158,2°$