

I. Continuité en un réel :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .
on dit que f est continue en a si pour tout nombre $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si
 $x \in I$ et $|x - a| < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

Exemple :

Soit la fonction f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + 3$, montrer que f est continue en $a = 1$

Solution :

La fonction f est continue en 1 si et seulement

si pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x - 1| < \alpha$ alors $|f(x) - f(1)| < \beta$

β est un réel donné, cherchons s'il existe un réel α tel que $|f(x) - f(1)| < \beta$

Soit $|f(x) - f(1)| < \beta$ équivaut à $|2x + 3 - 5| < \beta$ équivaut à $|2x - 2| < \beta$ équivaut à $2|x - 1| < \beta$

équivaut à $|x - 1| < \frac{\beta}{2}$

On choisit alors $\alpha = \frac{\beta}{2}$ (α existe) ainsi f est continue pour $a=1$

Vocabulaire :

Une fonction est non continue en a est dite discontinue en a .

Conséquences :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I

- Si on trace la courbe représentative de f sans lever le crayon en un point d'abscisse a , alors f est continue en tout réel a de I .
- Si la courbe possède un saut en un point d'abscisse a alors on dit que f est discontinue en a .

II. Continuité de certaines fonctions usuelles :

Théoreme :

- La fonction $x \longrightarrow ax + b$ est continue en tout réel a de \mathbb{R} .
- La fonction $x \longrightarrow x^2$ est continue en tout réel a de \mathbb{R} .
- La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ est continue en tout réel a de \mathbb{R}^* .
- La fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue en tout réel a de \mathbb{R}_+ .
- Toute fonction polynôme est continue en tout réel a de \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel a où elle est définie.

Exercice :

Justifier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = -3x^3 + x^2 - 4x + 5$; $a = 1$

.....

.....

2) $f: x \longrightarrow \frac{3x+5}{-2x+4}$; $a = \sqrt{2}$

.....

III. Continuité de la fonction $|f|$:

Activité :

- 1) Montrer que pour tout réel c et d , on a : $||c| - |d|| \leq |c - d|$.
- 2) Soit f la fonction définie en a , alors $|f|$ est continue en a .

Solution :

1)

1^{ère} méthode :

On remarque que pour tout réels c et d on a :

$$c \cdot d \leq |c| \cdot |d| \text{ équivaut à } 2c \cdot d \leq 2|c| \cdot |d| \text{ équivaut à } -2|c| \cdot |d| \leq -2c \cdot d$$

$$\text{équivaut à } c^2 - 2|c| \cdot |d| + d^2 \leq c^2 - 2c \cdot d + d^2 \text{ équivaut à } |c|^2 - 2|c| \cdot |d| + |d|^2 \leq c^2 - 2c \cdot d + d^2$$

$$\text{équivaut à } (|c| - |d|)^2 \leq (c - d)^2 \text{ équivaut à } \sqrt{(|c| - |d|)^2} \leq \sqrt{(c - d)^2}$$

$$\text{équivaut à } ||c| - |d|| \leq |c - d|$$

2^{ème} méthode :

$$\text{Pour tout réels } c \text{ et } d \text{ on a } |c| = |c - d + d| \leq |c - d| + |d| \text{ équivaut à } |c| - |d| \leq |c - d| \quad \text{-(1)-}$$

$$\text{de même } |d| = |d - c + c| \leq |d - c| + |c| \text{ équivaut à } |d| - |c| \leq |d - c| = |c - d|$$

$$\text{équivaut à } -(|d| - |c|) \geq -|c - d| \text{ équivaut à } |c| - |d| \geq -|c - d|$$

$$\text{équivaut à } -|c - d| \leq |c| - |d| \quad \text{-(2)-}$$

$$\text{d'après (1) et -(2)- on a } -|c - d| \leq |c| - |d| \leq |c - d| \text{ équivaut à } ||c| - |d|| \leq |c - d|$$

2) f est continue en a équivaut à

$$\text{pour tout } \beta > 0 \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que si } x \in I \text{ et } |x - a| < \alpha \text{ alors } |f(x) - f(a)| < \beta$$

$$\text{d'après 1) on a } ||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \beta$$

$$\text{alors } ||f(x)| - |f(a)|| < \beta$$

$$\text{donc pour tout } \beta > 0 \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que si } x \in I \text{ et } |x - a| < \alpha \text{ alors } ||f(x)| - |f(a)|| < \beta$$

alors $|f|$ est continue en a

Théoreme :

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$,
Si f est continue en a alors $|f|$ est continue en a

Exercice :

Justifier la continuité de la fonction f en a

1. $f : x \longrightarrow |x^2 - 4|$; $a = -2$

.....
.....
.....

2. $f : x \longrightarrow \frac{x^2+1}{|x^2-4|}$; $a = 3$

.....
.....
.....
.....

IV. Opérations algébriques sur les fonctions continues :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$ et $k \in \mathbb{R}$

- Si f et g sont continues en a alors $f + g$, $f \cdot g$ et $k \cdot f$ sont continues en a
- Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en a
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a

Exercice :

Justifier la continuité de la fonction f en a

1. $f : x \longrightarrow x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; $a = 3$

.....
.....
.....
.....

2. $f : x \longrightarrow \frac{|x|}{x^2+1}$; $a = -2$

.....
.....
.....
.....

V. Continuité de la fonction \sqrt{f} :

Activité 2 page 26 :

f est une fonction positive sur un intervalle ouvert I .

soit a un réel de I tel que f soit continue en a .

1) On suppose que $f(a) > 0$

a) Pour tout $x \in I$ on a :

.....
.....

b) On a :

.....
.....
.....

c) f est continue en a si et seulement si

pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x - a| < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

.....
.....
.....
.....

2) On suppose que $f(a) = 0$

f est continue en a si et seulement si

.....
.....
.....

Théoreme :

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .
Si f est continue en a alors la fonction \sqrt{f} est continue en a .

Exercice :

Etudier la continuité de f en a :

1. $f : x \longrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} ; a = 3$

.....
.....
.....

2. $f : x \longrightarrow \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x+1}} ; a = 2$

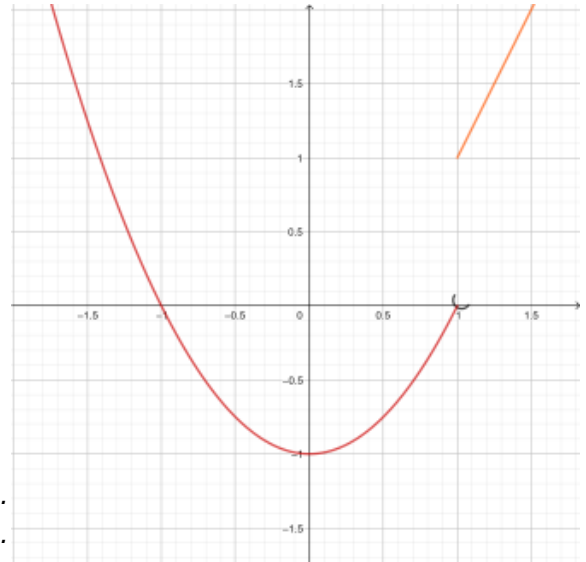
.....
.....
.....

VI. Continuité à droite. Continuité à gauche :

Activité :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- 1) Déterminer graphiquement l'image de 1 par f
.....
- 2) Donner graphiquement une condition suffisante sur les réels x supérieurs à 1, pour que $|f(x) - f(1)| \leq 0.001$
.....
.....
- 3) Que peut-on conjecturer sur $|f(x) - f(1)|$ lorsque x se rapproche de 1 en restant inférieur à 1
.....
.....
- 4) Calculer $f(0.9)$, $f(1.1)$, $f(1)$
.....
.....



Remarque :

Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe de f . **On constate que :**
 Si a se rapproche de 1 et $a < 1$ alors $f(a)$ n'est pas proche de $f(1)$ alors n'est pas
 Si a se rapproche de 1 et $a > 1$ alors $f(a)$ est proche de $f(1)$ alors f est

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I

- On dit que f est continue à droite en a si :
pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $0 < x - a < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$
- On dit que f est continue à gauche en a si :
pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $0 < a - x < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

Théoreme :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .
 f est continue en a , si f est continue à droite et à gauche en a

Exemple :

Soit la fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{x+1}$. Etudier la continuité à droite de f en -1

Correction :

La fonction f est continue à droite en -1 si et seulement si
 pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $0 < x - (-1) < \alpha$ alors $|f(x) - f(-1)| < \beta$
 β est un réel donné, cherchons s'il existe un réel α tel que $|f(x) - f(-1)| < \beta$
 Equivaut à $|\sqrt{x+1} - 0| < \beta$ équivaut à $|\sqrt{x+1}| < \beta$
 équivaut à $\sqrt{x+1} < \beta$ équivaut à $x+1 < \beta^2$ équivaut à $x < \beta^2 - 1$
 on choisit $\alpha = \beta^2 - 1$ (α existe) ainsi f est continue à droite en -1

Théorème :

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

- Si f est continue à droite en a alors la fonction \sqrt{f} est continue à droite en a .
- Si f est continue à gauche en a alors la fonction \sqrt{f} est continue à gauche en a .

VII. Continuité sur un intervalle :

Définition :

Soit a et b finis ou infinis :

- Soit f une fonction définie sur $]a, b[$, on dit que f est continue sur $]a, b[$ si elle est continue en tout $x \in]a, b[$
- Soit f une fonction définie sur $]a, b]$, on dit que f est continue sur $]a, b]$ si elle est continue en tout $x \in]a, b[$ et continue à gauche en b
- Soit f une fonction définie sur $[a, b[$, on dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue en tout $x \in]a, b[$ et continue à droite en a
- Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, on dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue en tout $x \in]a, b[$ continue à droite en a et continue à gauche en b

Conséquence 1 :

➤ Si une fonction est continue sur un intervalle I , alors elle est continue en tout intervalle inclus dans I .

Conséquence 2 :

➤ Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle continu dans \mathbb{R} .
 ➤ Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle continu dans son ensemble de définition.

Activité 2 page 29 :

Justifier les affirmations suivantes.

1. La fonction $f : x \mapsto |x| + 1$ est continue sur \mathbb{R}

.....

2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[0,1]$

.....

3. La fonction $f : x \mapsto -3x + 5$ est continue sur l'intervalle $] -0.01, 10]$

.....

4. La fonction $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$ est continue sur l'intervalle $[-1,0]$

.....

VIII. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Activité :

soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } -2 < x < 2 \\ (x+2)^3 + x + 4 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$

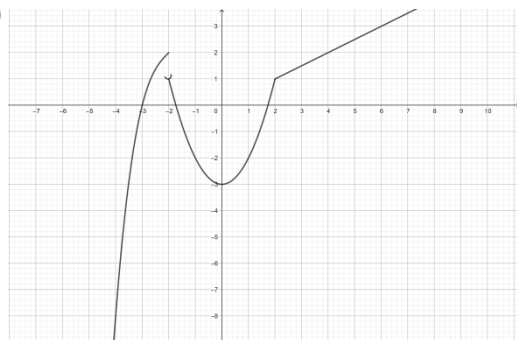
et soit \mathcal{C}_f sa représentation sur un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Montrer graphiquement que f n'est pas continue en -2

.....

2. Déterminer $f([2,6])$, $f(]-2, 2[)$ et $f(]-\infty, -2])$

.....



3. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x)=a$, avec a un réel

.....

Théorème : (admis)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

IX. Résolution d'équations de la forme $f(x) = k$:

Activité 3 page 31

1. a) figure

b) $(E) : \frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{x} - x^2 - 1 = 0 ; x_1 \approx 0.01 , x_2 \approx 2.6$

c) $0 < x_1 < 0.1$ et $2.6 < x_2 < 2.7$

2. soit $h : x \longrightarrow \frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{x} - x^2 - 1$

a) Calculer $h(0)$ et $h(1)$

.....

b) Justifier que 0 appartient à l'intervalle $h([0, 1])$

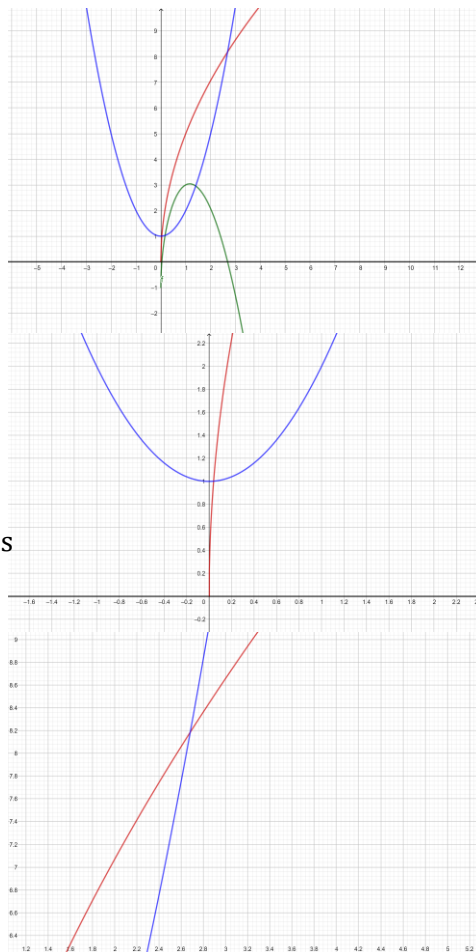
.....

c) En déduire que l'équation (E) possède au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$

.....

.....

.....



Définition :

Soient f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé. Résoudre l'équation $f(x)=k$:

- consiste à déterminer tous les réels x de D qui ont pour image k
- revient donc à déterminer l'ensemble des antécédents de k par f .

propriété :

Graphiquement, les solutions de $f(x)=k$ sont les abscisses de tous les points de C_f ayant pour ordonnée k

C_f et C_g sont respectivement les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal.

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D . Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$ consiste à déterminer tous les réels x de D qui ont la même image par f et par g .

Propriété

Graphiquement, les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et de g .

