LYCEE SBEITLA

06 - 03 - 2019

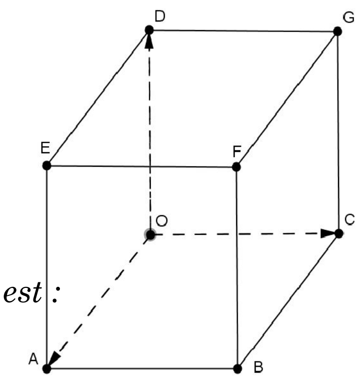
Epreuve Mathématiques
Durée: 03 heures

DEVOIR DE SYNTHESE N°1
4ème sc.exp 1

Professeur
Bellili Mongi

EXERCICE N°1 (03 pts)

Pour chacune des questions suivantes, on propose trois réponses dont une seule est exacte. Recopier cette réponse.
Dans la figure suivante OABCDEFG est un cube d'arrête 1. On muni l'espace au repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$



1°) *Le vecteur* $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AB}$ *est égal à :*

a. $\overrightarrow{AF}$ **b.** $\vec{0}$ **c.** $\overrightarrow{AO}$

2°) *Une équation du plan* (ABD) *est :*

a. $-x+z+1=0$ **b.** $x+z-1=0$ **c.** $x-z+1=0$

3°) *L'ensemble des points M de l'espace tel que:* $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{DM}=0$ *est :*

a. *La droite parallèle au plan* (ABC) *et passant par D*

b. *Le plan perpendiculaire au plan* (ABC) *et passant par D.*

c. *Le plan parallèle au plan* (ABC) *et passant par D.*

4°) *L'ensemble des points M de l'espace tel que:* $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ *est :*

a. *Une droite perpendiculaire au plan* (ABC)

b. *Une droite parallèle au plan* (ABC)

c. *Un plan parallèle au plan* (ABC)

EXERCICE N°2 (07 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

1°) a. *Montrer que f est dérivable sur* $[0,1[$ *et que :* $f'(x)=\dfrac{2x-x^3}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$

b. *Dresser le tableau de variation de f*

c. *Montrer que pour tout* $x\in[0,1[$ *on a :* $f(x)-x=\dfrac{x\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}$

d. *Déduire la position relative de la courbe représentative* ζ *de* f *et la droite* $\Delta : y = x$

e. *Tracer la courbe représentative* ζ *de* f *dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

2°) a. *Montrer que* f *est une bijection de* $[0,1[$ *sur* $\mathbb{R}_+$*, on note* f^{-1} *sa fonction réciproque.*

b. *Tracer dans le même repère la courbe représentative* ζ' *de* f^{-1}

c. *Etudier graphiquement la dérivabilité de* f^{-1} *à droite en* 0

3°) *Soit* F *la fonction définie sur* $[0,\pi]$ *par* $F(x) = \int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}.dt$

a. *Montrer que* F *est dérivable sur* $[0,\pi]$ *et calculer* $F'(x)$)

b. *Déduire que pour tout* $x \in [0,\pi]$ *on a :* $F(x) = \frac{1}{4}.\sin 2x - \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$

c. *Donner alors la valeur de l'intégrale :* $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}.dx$

4°) a. *A l'aide d'une intégration par partie, montrer que:* $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}.dx$

b. *Calculer l'aire* $\mathcal{A}$ *de la partie du plan limitée par les courbes* ζ, ζ' *et les droites d'équations :* $x = 0$ *et* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE N°3 — 04 pts

On pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}.dx$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}.dx$

1°) *Calculer* I_0

2°) a. *Montrer que la suite* (I_n) *est décroissante et qu'elle converge*

b. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :* $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ *puis déduire* $\lim_{n \to +\infty} I_n$

3°) a. *Montrer que pour tout* $n \ge 1$ *on a :* $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$

b. *Déduire la valeur de l'intégrale :* $J = \int_0^1 \left(x^2 - 2x\right)\sqrt{1-x}.dx$

EXERCICE N°4 (06 pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On considère les points : $A(1,1,-2)$, $B(3,2,-2)$, $C(0,2,1)$ *et* $D(2,2,1)$

Et la droite Δ : $\begin{cases} x=\beta+1 \\ y=-2\beta+1 \\ z=\beta \end{cases}$, $\beta\in\mathbb{R}$

1°) a. *Montrer qu'une équation cartésienne du plan P passant par le point D et perpendiculaire à* Δ *est :* $x-2y+z+1=0$

b. *Soit Q le plan dont une équation cartésienne est :* $x-2y+z+5=0$

Montrer que P et Q sont strictement parallèles.

2°) *Soit S l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *de l'espace tel que :*

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$$

a. *Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.*

b. *Vérifier que I appartient à la droite* Δ

c. *Déterminer les coordonnés du point H intersection de plan P et la droite* Δ.

d. *Montrer que* $P\cap S$ *est un cercle* ζ *dont on précisera le centre et le rayon.*

e. *Déterminer* $Q\cap S$

3°) a. *Déterminer les composantes du vecteur* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

b. *Montrer que pour tout point* $M(x,y,z)$ *on a :* $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}=3(x-2y+z+3)$

c. *Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour les quels le volume du tétraèdre ABCM est égale à 1.*

BON TRAVAIL