Epreuve Mathématiques Lycée sbeitla

DEVOIR DU CONTROLE N°1

$4^{ème}$ sc.exp1

Professeur Bellili Mongi

13- 11 - 2018

EXERCICE N°1 **06 pts**

1°) *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par:* $f(x)=\begin{cases} x-3+\sqrt{x^2-6x} & si\ x\leq 0 \\ \sqrt{x}.\sin\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)-3 & si\ \ 0<x \end{cases}$

a. *Montrer que pour tout réel* $x\in\left]0,+\infty\right[$ *on a :* $-3-\sqrt{x}\leq f(x)\leq -3+\sqrt{x}$

b. *Montrer que f est continue en 0.*

c. *Justifier que f est continue sur* $\mathbb{R}$

2°) **a.** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

b. *Calculer les limites suivantes :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(\dfrac{x}{x-2}\right)$

3°) *Soit g la fonction définie sur* $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ *par:* $g(x)=\begin{cases} f(\tan x) & si\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right] \\ 0 & si\ \ x=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$

EXERCICE N°2 **06 pts**

Soit la suite (U_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par:* $U_0=4$ *et* $U_{n+1}=\dfrac{U_n^2+1}{2U_n}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$

1°) **a.** *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :* $U_n\succ 1$

b. *Montrer que la suite* (U_n) *est décroissante*

c. *Déduire que* (U_n) *est convergente et calculer sa limite*

2°) **a.** *Montrer que pour tout entier naturel n on a :* $0\prec U_{n+1}-1\leq\dfrac{1}{2}(U_n-1)$

b. *Montrer alors que pour tout entier naturel n on a :* $0\prec U_n-1\leq 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c. *Déduire la limite de* (U_n)

3°) *On pose pour tout entier non nul n,* $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a. *Justifier que pour tout entier naturel non nul k on a :* $1 \le U_k \le 1 + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^k$

b. *Montrer que :* $n \le S_n \le n + 3.\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

c. *Déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

EXERCICE N°3 — 08 pts

On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E) : z^2 + 2\left(\sqrt{3} - i\right)z - 4i\sqrt{3} = 0$

1°) a. *Vérifier que :* $\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^2 = 8 + 8i\sqrt{3}$

b. *Résoudre l'équation* (E)

2°) *On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ *, les points A , B et C d'affixes respectives :* $z_A = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_B = -2\sqrt{3}$ *et* $z_C = \sqrt{3} - 3i$

a. *Montrer que le triangle OBC est isocèle en O*

b. *Mettre* z_A *sous forme exponentielle*

c. *Construire alors les points A , B et C*

3°) *On considère les points D et E d'affixes :* $z_D = 2i$ *et* $z_E = -\frac{z_C}{2}$

a. *Montrer que :* $\frac{z_C - z_E}{z_B - z_D} = i\frac{3\sqrt{3}}{4}$ *puis interpréter géométriquement le résultat*

b. *Montrer que les point B , E et D sont alignés*

c. *Placer le point D puis construire E dans le repère* $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

d. *Montrer que l'aire du triangle BDC est égale à* $6\sqrt{3}$

BON TRAVAIL