DEVOIR SYNTHESE 2.

MAI 2017. (2 H)

4° éco. G E S T.

S M A A L I.

EXERCICE N°1.

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90% des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant Internet affirment vouloir continuer à utiliser Internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin.
- 60% des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant Internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs.

On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat sur Internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat en magasin.

On suppose de plus que : $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

On note $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état probabiliste correspondant au n-ième achat.

Ainsi $P_1 = (1 \quad 0)$.

On note :

- A l'état : « La personne effectue son achat sur Internet »
- B l'état : « La personne effectue son achat en magasin »

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Ecrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. On donne la matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$.

quelle est la probabilité que la personne interrogée fasse son 5ème achat sur Internet.

4. On note $P = (a \quad b)$ l'état stable associé à ce graphe.

(a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système : $\begin{cases} 0,1\,a - 0,4\,b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

(b) Résoudre le système précédent.

(c) A long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur Internet ?

5. (a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $a_{n+1} = 0,5\, a_n + 0,4$

(b) Montrer que la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = a_n - 0,8$ est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.

(c) donner le terme général de u_n, et déduire que $a_n = 0,8 + 0,2.\,(0,5)^{n-1}$

(d) calculer la limite de u_n à l'infini, et comparer avec le résultat de 4.c).

EXERCICE N°2.

(arrondir si nécessaire, les valeurs à 10^{-3} prés).

Soit f la fonction définie sur $[3, 13]$ par : $f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$.

A/ 1) Montrer que $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$: pour tout x de $[3, 13]$.

2) a- Résoudre dans $[3, 13]$ l'inéquation : $e^{-2x+10} > 1$

b- Déduire le signe de $f'(x)$ sur $[3, 13]$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[3, 13]$.

4) calculer $\int_3^{13} f(x)dx$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée.

B/ Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1300. On suppose que toute la production est commercialisée. Le bénéfice mensuel (en milliers de dinars), réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3, 13]$ par la fonction f.

1) Quel est le nombre de toboggans que doit produire l'usine pour obtenir un bénéfice maximal ? donner ce bénéfice arrondi au dinar.

2) quel est le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1300 toboggans ? arrondir le résultat au dinar.

C/ Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif.

Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum que l'usine doit fabriquer et vendre pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.