Epreuve Mathématiques Lycée sbeitla

DEVOIR DU SYNTHESE N°2
$3^{ième}$ MATHS

Professeur Bellili Mongi
26 - 05- 2018

EXERCICE N°1 **05 pts**

Soit la suite (U_n) *définie sur IN par:* $U_0 = 0$ *et* $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

1°) a. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :* $0 \leq U_n < 1$

b. *Etudier la monotonie de la suite* (U_n)

2°) *On pose pour tout entier naturel n,* $V_n = \dfrac{1 - U_n}{1 + U_n}$

a. *Montrer que* (V_n) *est une suite géométrique de raison* $q = \dfrac{1}{3}$

b. *Exprimer* V_n *puis* U_n *en fonction de n.*

c. *Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3°) a. *Montrer que pour tout entier n on a :* $1 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(1 - U_n)$

b. *Montrer par récurrence sur n que :* $1 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c. *Montrer alors* (U_n) *converge et donner sa limite*

4°) *On pose pour tout entier non nul n,* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$

a. *Justifier que pour tout entier naturel non nul k on a :* $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \leq U_k \leq 1$

b. *Montrer que pour tout entier non nul n on a :* $n - 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leq S_n \leq n$

c. *Déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$

EXERCICE N°2 **06 pts**

Soit f la fonction définie sur l'ensemble : $D =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ *par:* $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a. *Etudier la dérivabilité de f à droite en* 2 *et à gauche en* -2 *puis interpréter graphiquement les résultats*

b . *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ *puis interpréter graphiquement le résultat*

c. *Montrer que la droite* $\Delta: y=-2x$ *es une asymptote oblique à (C) au voisinage de* $-\infty$

2°) a. *Montrer que f est dérivable sur* $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ *et que :*

$$f'(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{4}{\sqrt{x^2-4}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}$$

b. *Dresser le tableau de variation de f*

c. *Tracer (C).*

3°) *Soit (C') le symétrique de (C) par rapport au point O*

a. *Soient deux points* $M(a,b)$ *et* $N(x,y)$ *du plan symétriques par rapport à O .*

Justifier que : $a=-x$ *et* $b=-y$

b. *Montrer que :* $N\in(C')$ *si et seulement si :* $x\in D$ *et* $y=-\sqrt{x^2-4}-x$

c. *Soit* Γ *la courbe d'équation :* $y^2+2xy+4=0$

Montrer que $\Gamma=(C)\cup(C')$ *puis la construire*

EXERCICE N°3 **04 pts**

Les questions **1°)** *,* **2°)** *et* **3°)** *sont indépendantes*

1°) *On considère l'équation (E):* $5x-11y=4$ *où* $(x,y)\in\mathbb{N}^2$

a. *Vérifier que* $(3,1)$ *est une solution de (E).*

b. *Montrer que* (x,y) *est solution de (E) si et seulement si* $5(x-3)=11(y-1)$

c. *En déduire les solutions de (E).*

2°) *Résoudre dans* $\mathbb{N}^2$ *le système suivant :* $\begin{cases} a\times b=1800 \\ a\vee b=300 \\ a\leq b \end{cases}$

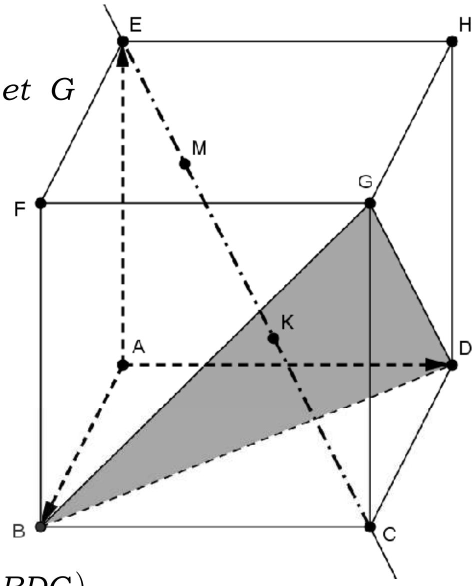
3°) a. *Le nombre* 853 *est-il premier ?*

b. *Montrer que le nombre* $10^{852}-1$ *est divisible par* 853

c. *Déduire le reste de la division euclidienne de* $10^{852}+899$ *par* 853

EXERCICE N°4 **05 pts**

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et rapporte l'espace au repère orthonormé direct $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$



1°) a. *Déterminer les coordonnées des points B , C , D , E et G*

b. *Montrer que l'on a :* $\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

c. *Déterminer alors une équation cartésienne du plan (BDG)*

2°) a. *Donner un système de représentation paramétrique de la droite (EC)*

b. *Déterminer les coordonnées du point K intersection de (EC) et le plan (BDG)*

3°) *Soit le point $M(\alpha,\alpha,1-\alpha)$ avec $\alpha\in[0,1]/\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$*

a. *Justifier que le point M décrit le segment $[EC]$ privé du point K .*

b- *Montrer que le volume V du tétraèdre $BDGM$ est tel que: $V=\dfrac{1}{6}\left|3\alpha-2\right|$*

c. *Déduire le volume V' du tétraèdre $BDGC$*

d. *Déduire alors la distance du point C au plan (BDG)*

e. *Déterminer la position de M pour la quelle le volume V du tétraèdre $BDGM$ est égal au tiers du volume du cube $ABCDEFGH$*

BON TRAVAIL