Devoir de controle n°3

Proposé par : Riadh ZAGHOUANI

EXERCICE 1 (2 points)

1. La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec X>0. Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

La probabilité p(X> 6) est égale à 0,3 alors λ est égale à :

a. 0,4 b. 0,2 c. 0,3 d. 0,1

2. La valeur moyenne da la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par : f(x) = sin x est égale à :

a. $\frac{2}{\pi}$ b. $\frac{\pi}{2}$ c. $\frac{\pi}{4}$ d. 2π

3. $\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x} dx$ est égale à :

a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{3}$

4. On considère la courbe répresentant la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Le volume que l'on obtient par rotation autour de l'axe (Ox) est égal à :

a. $\frac{\pi(\pi-4)}{4}$ b. $\frac{\pi(4-\pi)}{4}$ c. $\frac{\pi}{4}$ d. $\frac{4-\pi}{4}$

EXERCICE 2 (5 points)

Dans une usine, à la fin d'une chaine de fabrication, on effectue deux tests de qualité T_1 et T_2.

Chaque pièce fabriquée sur la chaine subit les deux tests.

95% des pièces fabriquées sur la chaine réussissent le test T_1.

Parmi les pièces ayant réussi le test T_1, 99% réussissent le test T_2.

Parmi les pièces ayant échoué au test T_1, 98% réussissent le test T_2.

Etant donnée une pièce, on note T_1 l'évènement « la pièces réussit le test T_1 » et T_2 « la pièces réussit le test T_2 ».

Devoir de controle n°3

Proposé par : Riadh ZAGHOUANI

Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

1. a. Calculer la probabilité de l'évènement S : « la pièce franchit avec succès les deux tests ».

b.Calculer la probabilité qu'une pièce réussisse le test T_2.

c. Les évènements T_1 et T_2 sont-ils indépendants ?

d. On choisit une pièce ayant rèussi le test T_2.Quelle est la probabilité qu'elle ait rèussi le test T_1?

2. Les pièces ayant réussi les deux tests, sont commercialisées au prix de 10 dinars. Celles n'ayant réussi que l'un des deux tests sont vendues au prix promotionnel de 5 dinars. Les autres sont jetées.

Etant donnée une pièce, on note X la variable aléatoire correspondants à son prix de vente.

a. Donner (sous forme d'un tableau) la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance E(X) de X. Interpréter.

3. Dans cette question, on suppose que la probabilité P(S) qu'une pièce ait réussi les deux tests est égale à 0,9405. On dispose d'un carton de 10 pièces dont on ignore la qualité. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de pièces du carton qui ont réussi les deux tests.

a. Calculer la probabilité que les 10 pièces aient réussi les deux tests.

b. Calculer la probabilité qu'exactement 7 pièces aient réussi les deux tests.

c. Calculer la probabilité qu'au moins une pièce ait réussi les deux tests.

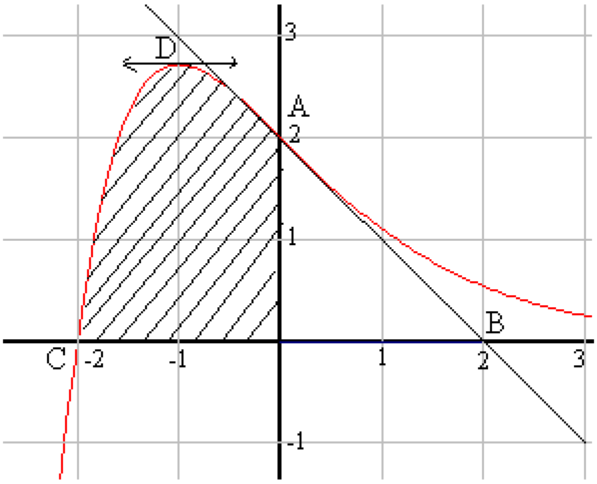
d. Calculer l'espérance E(Y) de Y. Interpréter.

EXERCICE 3 (6 points)

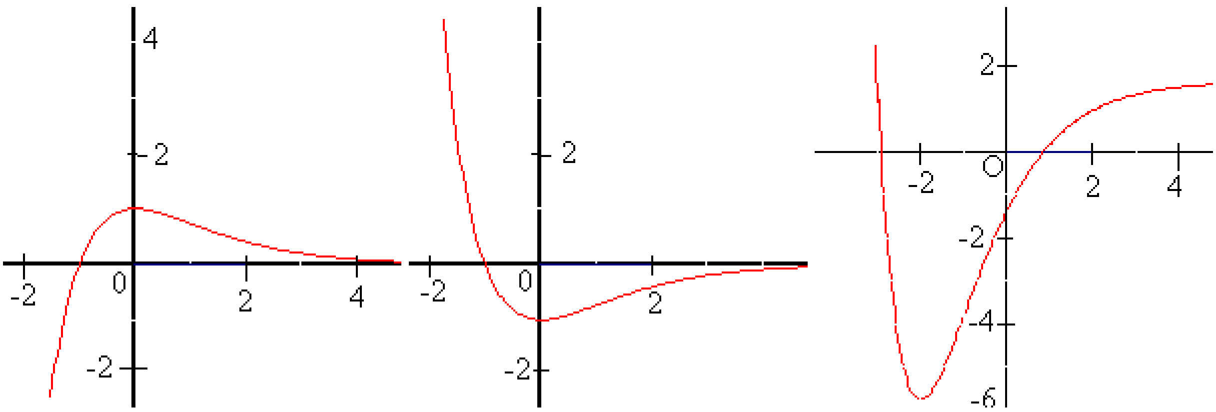
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthononnal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γpasse par les points A(0 ;2) et C(-2 ; 0) et la droite (AB) est la tangente en A à Γ.
La tangente à Γen son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Devoir de controle n°3

Proposé par : Riadh ZAGHOUANI



1. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.



Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.
Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

2. a. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

b. On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (x + \mathrm{K})e^{ax}$ où K et a sont des constante réelles.

Calculer $f'(x)$ puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et a.

En déduire que f est définie par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

3. a. Montrer que la fonction.définie par $\varphi(x) = (-x-3)e^{-x}$ est une primitive de f .

b. En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.

EXERCICE 4 (7 points)

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.

Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est donnée en annexe,

1. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose

$$I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

b) Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0;1]$.

On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0\le u_n\le\frac{\ln 2}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .