Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		*2008 - 2009*
Épreuve : Mathématiques	*Devoir de contrôle n° 3*	*Durée* : **2h**
Prof : MAATALLAH	*Le* 25 - 04 - 2009	Classe : 4 Tec 2

EXERCICE N° 1 (7 points)

Une usine fabrique en série un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'usine pouvait présenter deux types de défaut : *) Un défaut de soudure avec une probabilité égale à $\left(\frac{1}{10}\right)$. **) Un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à ($\frac{2}{5}$). Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1/ Déterminer la probabilité qu'un article fabriqué par l'usine soit défectueux .

2/ a) Un commerçant passe une commande de 10 articles à l'usine. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 10 articles associe le nombre d'articles défectueux. Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer $V(X)$

b) Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à ($\frac{1}{2}$). Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

3/ La durée de vie en jours d'un article suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}05$.

a) Calculer la probabilité qu'un tel article ait une durée de vie en jours entre 500 et 1000 jours.

b) Sachant que l'article a fonctionné 1000 jours, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 1500 jours.

EXERCICE N°2 (5 points)

Soit la suite réelle U définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+4U_n{}^2}}$

1/ Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$.

2/ a) Montrer que la suite U est décroissante.

b) En déduire que la suite U est convergente puis calculer sa limite.

3/ Soit la suite réelle V définie sur IN par $V_n = \frac{1}{4U_n^2}$.

a) Montrer que V est une suite arithmétique . Retrouver la limite de U_n

c) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$, $n \in IN^*$, calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$

EXERCICE N° 3 (8 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = (1 - e^{-x})^2$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a)Dresser le tableau de variation de f . Puis tracer la courbe (C_f) .

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 0$ et $x = 2$

2/ Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 1 + f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet dans IR une solution unique α , vérifier que $1 < \alpha < 2$.

3/ Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in IN$; $U_{n+1} = 1 + f(U_n)$

a) Montre que $\forall n \in IN$ $on\, a : 0 \leq U_n < \alpha$.

b) Etudier la monotonie de la suite U . Montrer que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

4/ Soit $I_n = \int_0^1 f(t) e^{-nt} dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$ et que (I_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente puis calculer sa limite.

Bon travail