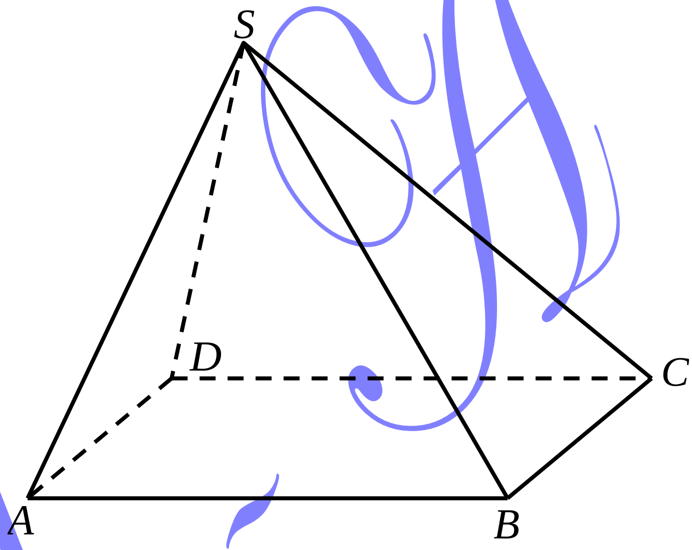
DEVOIR DE CONTROLE N° 03

Exercice N° 01: (8 pts)

Une fourmi se déplace de façon aléatoire sur les arêtes de la pyramide $SABCD$ de sommet S . Depuis un sommet quelconque elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin. On dit qu'elle " fait un pas ". La fourmi se trouve initialement au point A .

1/ Après avoir fait deux pas , qu'elle est la probabilité qu'elle soit :

a) En A ?
b) En B ?
c) En C ?
d) En D ?



2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'évènement : " La fourmi se trouve au sommet S après n pas " , et $p_n = P(S_n)$.

a) Que vaut p_1 ?

b) En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n)$.

3/ On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n) \,;\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_n = \frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

Exercice N°02 : (3 pts)

1/ On choisit au hasard un nombre $x \in [0,4]$.

Calculer $P\left(x^2 - 8x + 12 < 0\right)$.

2/ On choisit au hasard cinq nombres dans l'intervalle $[0,4]$.

a) Quelle est la probabilité que trois de ces nombres vérifient : $x^2 - 8x + 12 < 0$?

b) On note X la variable aléatoire égale au nombre de ces nombres réels vérifiant : $x^2 - 8x + 12 < 0$.

Déterminer $E(X)$.

Exercice N° 03: (9 points)

Soit $I_n = \int_0^2 \frac{(2-x)^n}{n!} e^x \, dx \quad ; \; n \in \mathbb{N}^*$.

1/ Calculer I_1.

2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)$.

3/ A l'aide d'une intégration par parties , montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n .$$

5/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \frac{2^n}{n!}$.

a) Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$, on a : $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$, on a : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} U_3$.

6/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

7/ Justifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2$

Bon Travail .....✍