

Exercice n°1(5pts)

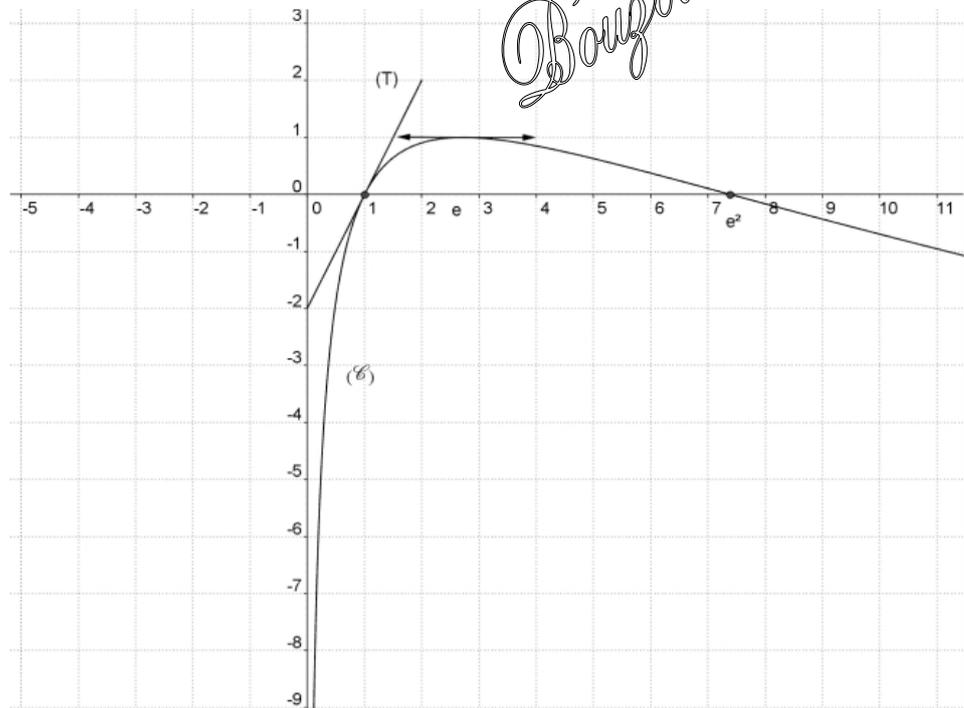
1) Etudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1+x^2}{3+x^2}$

2) Soit $h(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$

- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une unique solution x_0 .
- Vérifier que $1/3 < x_0 < 1$.
- Etudier le signe de $h(x)$.

3) On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

- Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} ; $0 < U_n < x_0$
- Etudier la monotonie de la suite (U_n)
- Montrer que la suite (U_n) converge vers x_0 .

Exercice n°2(4pts)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (a + b \ln(x)) \ln(x)$, où a et b sont des réels. La figure ci-dessus est la représentation graphique de la fonction f , relativement à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont la direction est celle de la droite (O, \vec{i}) .

-1- Par lecture graphique, déterminer.

a) $f'(1)$; $f'(e)$; $f'(e^2)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau des variations de f .

-2- a) Montrer que $f'(x) = \frac{a+2b \ln(x)}{x}$

b) Déterminer a et b

-3- Soit la fonction g définie par $g(x) = -x(2 - \ln(x))^2$. Montrer que g est une primitive de f sur $]0, +\infty[$

-4 - En déduire $\int_1^{e^2} f(x) dx$

Exercice n°3(5pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées A(3; -2; 2), B(6; 1; 5), C(6; -2; -1).

Partie A

- 1) Démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.
- 2) Soit \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne :

$$x + y + z - 3 = 0$$

Prouvez que \mathcal{P} est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.

- 3) Soit \mathcal{P}' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminez une équation cartésienne de \mathcal{P}' .
- 4) Déterminez un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' .

Partie B

- 1) Soit D le point de coordonnées (0; 4; -1). Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
- 2) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
- 3) Prouvez que l'angle \widehat{BDC} a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radian.
- 4) a) Calculez l'aire du triangle BDC.
b) Déduisez-en la distance du point A au plan (BDC).

Exercice n°4(6pts)

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

et \mathcal{C}_f est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- 1) a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$
b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- 2) a) On note A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse 1.
Trouver une équation de la tangente T à \mathcal{C}_f en A.
b) Construire T , puis \mathcal{C}_f .
- 3) M est un point de \mathcal{C}_f . M(u ; f(u))
Démontrer que la tangente T_u à la courbe \mathcal{C}_f en M est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si, et seulement si :
$$u^3 - 1 + 2 \ln u = 0 \quad [1]$$
- 4) À partir de l'équation [1], démontrer que A est le seul point de \mathcal{C}_f en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

