

DEVOIR DE SYNTHESE n° 2

CLASSE : 4 TECH

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

DUREE : 3 h

COEFFICIENT : 3

Exercice 1 : (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux.

1) La primitive sur $]0 ; +\infty[$, qui prend la valeur 0 en 1, de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction $F : x \mapsto \ln x$

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé. La droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

3) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = 2$ est une sphère.

4) l'ensemble des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$ est un plan.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(0 ; 6 ; 0)$, $B(0 ; 0 ; 8)$ et $C(4 ; 0 ; 8)$.

1) Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (unité graphique : 1 cm).

2) a) Démontrer que les triangles ABC et OAC sont rectangle respectivement en B et on O .

b) la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OAB) .

3) Déterminer le volume, en cm^3 , du tétraèdre $OABC$.

4) Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 4 : (6 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(1, 2, -1)$ et $B(2, 1, 1)$

1) Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à (AB) est $x - y + 2z + 3 = 0$

2) Soit P_m les plans d'équation cartésienne $x + y + m - 3 = 0$ où m est un paramètre réel.

a) Montrer que (AB) est parallèle à P_m .

b) Pour quelle valeur de m , la droite (AB) est incluse dans P_m ?

3) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R .

b) Etudier suivant les valeurs de m , les positions relatives du plan P_m et la sphère S .

c) Montrer que P_1 coupe S suivant un cercle dont on précisera les coordonnées du centre H et le rayon r .

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j})

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x^2}$.

Soit C la courbe représentative de f et soit H celle de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que C a deux asymptotes que l'on déterminera.

2) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-4 \ln x}{x^3}$ et en déduire le tableau de variations de f .

3) Pour tout x de $]0, +\infty[$ on pose $g(x) = 1 - x + 2 \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de la fonction g .

b) Calculer $g(1)$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; 2[$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 4[$

Vérifier que $3,5 < \alpha < 3,6$

4) a) Montrer que $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que C et H se coupent en deux points.

b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 4$, $0 < f(x) < \frac{1}{x}$

5) Tracer C et H .

CORRECTION :**Exercice 1 : (3 points)**

1) Vrai

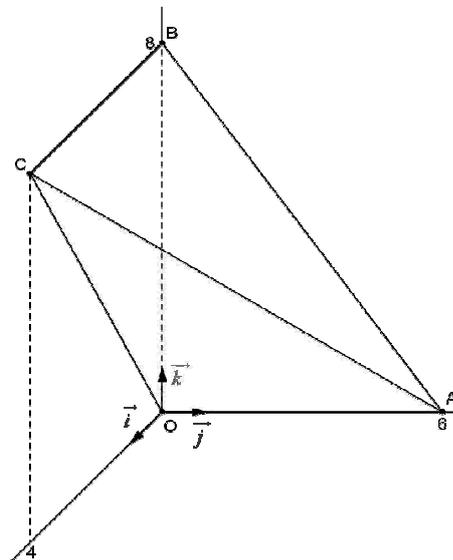
2) Vrai, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$

3) Vrai. Soit G le barycentre des points pondérés (A,4) et (B,-1) $\|4\overline{MA} - \overline{MB}\| = 2 \Leftrightarrow MG = \frac{2}{3}$

4) Faux $(\overline{AB}, \overline{AB}, \overline{AM}) = 0$ pour tout point M de l'espace.**0,75 x 4****Exercice 2 : (5 points)**Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points A (0 ; 6 ; 0), B (0 ; 0 ; 8) et C (4 ; 0 ; 8).

1)

**0,5 x 3**

2) a) $\overline{BA} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \overline{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0 \times 4 + 6 \times 0 + (-8) \times 0 = 0 \Leftrightarrow \overline{BA} \perp \overline{BC}$ ainsi le triangle

ABC est rectangle en B.

$\overline{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{OC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0 \times 4 + 6 \times 0 + 0 \times 8 = 0 \Leftrightarrow \overline{OA} \perp \overline{OC}$ ainsi le triangle OAC est

rectangle en O.

0,5 x 2b) Le plan $(OAB) = P(O, \vec{j}, \vec{k})$ comme la droite (O, \vec{i}) est perpendiculaire au plan $P(O, \vec{j}, \vec{k})$ et comme la droite (BC) est parallèle à la droite (O, \vec{i}) . Donc $(BC) \perp (OAB)$ **1**

3) $\mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{OAB} \times BC = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} OA \times OB \right) \times BC = \frac{1}{6} \times 6 \times 8 \times 4 = 32 \text{ cm}^3$

Autre méthode : $\mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{6} |(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})|$

1

4) Les triangles BAC et OAC sont rectangles respectivement en B et O donc il suffit de prendre la sphère de diamètre [AC] qui passe par les points O et B	0,5
---	------------

Exercice 3 : (6 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points A(1,2,-1) et B(2,1,1)

1) Le plan Q est perpendiculaire à (AB) donc le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur normal à Q. Donc Q: $x - y + 2z + d = 0$. Q passe par A(1,2,-1) donc $1 - 2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow -3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$ D'où Q: $x - y + 2z + 3 = 0$	1
--	----------

2) Soit P_m les plans d'équation cartésienne $x + y + m - 3 = 0$ où m est un paramètre réel. a) $\overrightarrow{N}_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: Le vecteur normal à P_m $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{N}_m = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 2 \times 0 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{N}$ d'où (AB) est parallèle à P_m .	1
--	----------

b) Comme (AB) est parallèle à P_m donc (AB) est incluse dans P_m si $A \in P_m$ donc $1 + 2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 0$	0,5
--	------------

3) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tel que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ $M(x, y, z) \in \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 4$ Donc S est la sphère de centre I(-1,1,0) et de rayon R = 2.	1,5
--	------------

b) $d(I, P_m) = \frac{ -1+1+m-3 }{\sqrt{1+1}} = \frac{ m-3 }{\sqrt{2}}$ $d(I, P_m) - R = \frac{ m-3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(m-3)^2 - 8}{\sqrt{2}(m-3 + 2\sqrt{2})}$ $(m-3)^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 3 + 2\sqrt{2}$ ou $m = 3 - 2\sqrt{2}$	1
---	----------

m	$-\infty$	$3 - 2\sqrt{2}$	$3 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$
$(m-3)^2 - 8$	+	0	0	+
Position de P_m et S	$P_m \cap S = \emptyset$	$P_m \cap S = \text{un cercle}$	$P_m \cap S = \emptyset$	

Si $m = 3 + 2\sqrt{2}$ ou $m = 3 - 2\sqrt{2}$ alors P_m est tangent à S.

c) $1 \in]3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}[$ donc le plan P_1 coupe S suivant un cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - (d(I, P_1))^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$ et de centre H le projeté orthogonal de I sur P_1 . $\begin{cases} H(x,y,z) \in P_1 \\ \overrightarrow{IH} = \alpha \overrightarrow{N}_m \end{cases} \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \alpha + 1 + \alpha - 2 = 0 \\ x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ D'où H(0,2,0)	1
--	----------

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j})

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$.

Soit C la courbe représentative de f et soit H celle de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} (1+2\ln x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à C .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

1

2) f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)x^2 - 2x(1+2\ln x)}{x^4} = \frac{2x - 2x - 4x \ln x}{x^4} = \frac{-4x \ln x}{x^4} = \frac{-4 \ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4 \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		+	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

1

3) Pour tout x de $]0, +\infty[$ on pose $g(x) = 1 - x + 2 \ln x$.

a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$, $g'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	
		+	-
$g(x)$	$-\infty$	$-1 + 2 \ln 2$	$-\infty$

1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x + 2 \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + 2 \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

b) $g(1) = 1 - 1 + 2 \ln 1 = 0$, g est continue et strictement croissante sur $]0; 2[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; 2[$.

0,5

c) g est continue sur $]2; 4[$ et $g(4) = -3 + 4 \ln 2 \approx -0,22$; $g(2) = -1 + 2 \ln 2 \approx 0,39$

$g(4) \times g(2) < 0$ et comme g est strictement décroissante sur $]2; 4[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 4[$.

$g(3,5) \approx 0,2$, $g(3,6) \approx -0,04$ et $g(3,5) \times g(3,6) < 0$ donc $3,5 < \alpha < 3,6$

0,5

$$4) \text{ a) } f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1+2\ln x}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1+2\ln x - x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Les abscisses des points d'intersection de C et H sont les solutions de l'équation $f(x) - \frac{1}{x} = 0$

$$f(x) - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \alpha \text{ Donc C et H se coupent en deux points.}$$

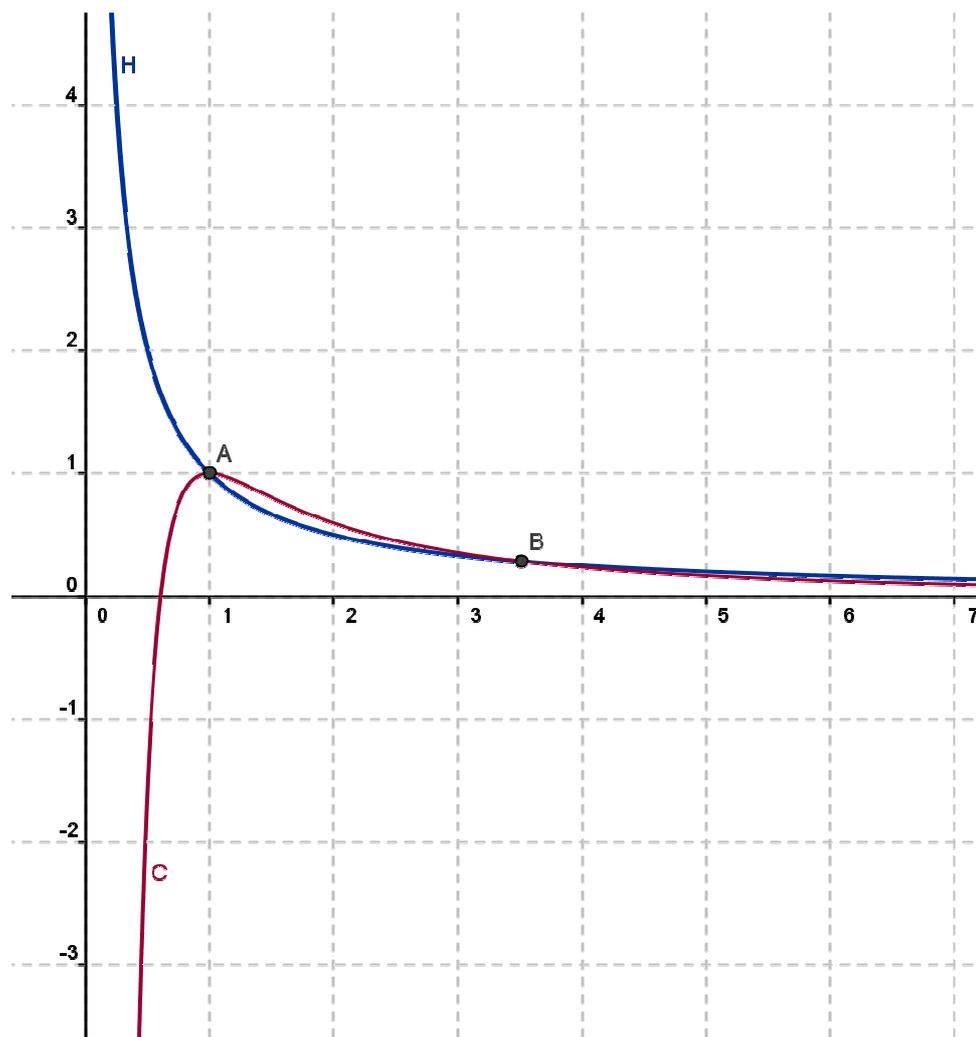
1

b) pour tout réel $x \geq 4$, $f(x) > 0$ et $g(x) < 0$ donc $\frac{g(x)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{x} < 0$

d'où pour tout réel $x \geq 4$, $0 < f(x) < \frac{1}{x}$

0,5

5)



0,5