

<i>Lycée Houmet Souk</i>	<i>Devoir de Contrôle N : 2</i>	<i>4 Techniques 2</i>
<i>Prof : Loukil Mohamed</i>	<i>Durée : 2 Heures</i>	<i>15 - 02 - 2019</i>

EXERCICE N : 1 (5.75 points)

On considère dans l'espace (ξ) muni du repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(2, 2, 1)$, $B(0, -2, 4)$ et $C(2, 0, -4)$.

- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{OB} \wedge \overline{BC}$.
b) Dédire que les points O, B et C définissent un plan noté P .
c) Prouver que la droite (OA) est perpendiculaire au plan P en O .
c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égal à $\sqrt{2}$.
- 2) $(S) = \{ M(x, y, z) \in \xi \text{ tels que : } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0 \}$.
Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $R = \sqrt{11}$.
- 3) a) Calculer la distance OA .
b) Dédire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon $r = \sqrt{2}$.
c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (\mathcal{C}) .
- 4) On considère le point $H(1, -1, 0)$.
a) Prouver que le point H est le point de contact de la sphère (S) et la droite (BC) .
b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à (S) en H .

EXERCICE N : 2 (5.75 points)

A) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x - 2 \ln(x)$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Calculer $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

B) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$.

On note (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b) Dresser le tableau de variations de f .

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution $\alpha \in]0,56; 0,57[$

C) Dans l'annexe on a construit la courbe (Γ) de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{x}$.

1) Etudier les positions relatives des courbes (Cf) et (Γ) .

2) Tracer dans l'annexe la courbe (Cf) .

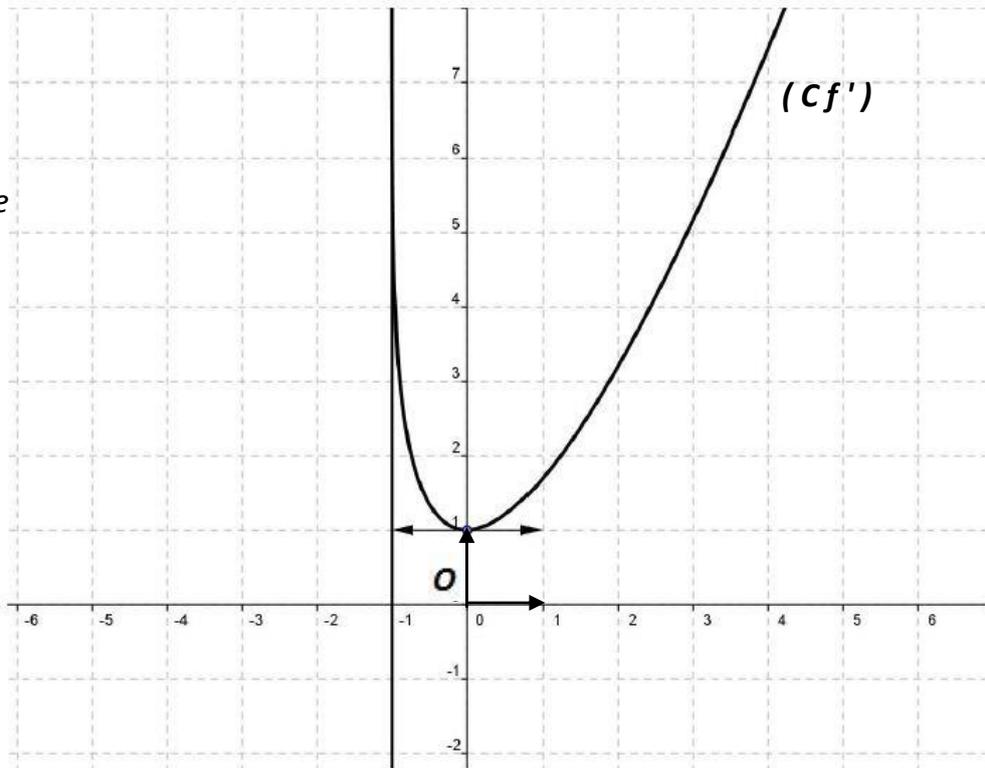
EXERCICE N : 3 (8.5 points)

A) Lecture graphique : b

Soit f une fonction définie et dérivable sur $] -1 ; +\infty [$ tel que $f(0) = 0$.

la courbe $(C_{f'})$, ci-contre, est la représentation graphique de sa fonction dérivée f' .

La droite d'équation : $x = -1$ est une asymptote à $(C_{f'})$.



1) Lire graphiquement

$f'(0)$; $f''(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x}$

2) Dresser le tableau de variations de f' .

3) a) Justifier que O est le seul point d'inflexion de la courbe (C_f) représentative de f .

b) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point O .

4) Soit g la restriction de f' sur $[0 ; +\infty [$.

a) Montrer que g admet une réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Déterminer $g^{-1}(1)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g^{-1}(x)}{x-1}$.

5) On suppose que : $f'(x) = a + x \ln(ax + b)$ où a et b sont des constantes réelles.

Utiliser la question 1) pour déterminer les valeurs de a et b .

B) On suppose pour la suite que pour tout $x \in] -1 ; +\infty [$: $f'(x) = 1 + x \ln(x + 1)$.

1) Montrer que pour tout $x \in] -1 ; +\infty [$; $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x + 1) - \frac{1}{4}(x^2 - 6x)$.

2) Prouver que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{7}{4}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

3) a) Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

b) Tracer dans un repère orthonormé (Unité 2 cm) la tangente (T) et la courbe (C_f) .

Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie

